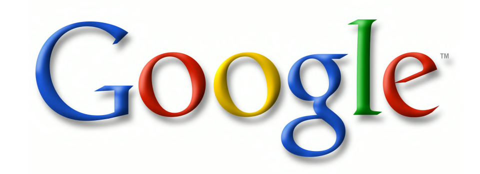




Theilung

des

Winkels und des Kreises,

oder:

Bi-, Tri-, Quadri- und Polysection

jedes beliebigen Winkels in *72 neuen Methoden*, nebst mehreren neuen Lehrsätzen und Sections-Curven, mit geschichtlicher Einleitung der historisch-merkwürdigen Aufgabe über die Trisection des Winkels, und einem Anhange über die Construction der Winkel in Graden,

als Beitrag zur elementaren und höheren Geometrie,

erfunden, berechnet und construirt

von

Nicolaus Fialkowski,

Architekten, ehemaligen Schüler des k. k. polytechnischen Institutes und der k. k. Akademie der bildenden Künste, gewesenen Assistenten für die Lehrkanzel der darstellenden Geometrie und Supplenten für das vorbereit. technische Zeichnen am genannten Institute, dermalen Professor der Geometrie, Baukunst und des geometrischen Zeichnens an der Wiener Communal-Realschule in der Vorstadt Gumpendorf zu Wien.

Mit 178 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Wien.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1860.

Vorrede.

Vorliegendes Werk, welches ich dem mathematischen Publikum übergebe, enthält in sich, wie schon das Titelblatt zeigt, die Theilung des Winkels im Allgemeinen, somit auch des Kreises, insbesondere aber die Trisection eines jeden beliebigen Winkels; also die Auflösung einer historisch merkwürdigen Aufgabe, welche bis jetzt gänzlich vernachlässigt wurde.

Die Theilung des Winkels ist nach meinen bisherigen Erfahrungen die schwerste, aber auch die fruchtbringendste Aufgabe aus dem ganzen unermesslichen Gebiete der Geometrie.

Das Bestreben der alten Griechen, diese Aufgabe aufzulösen, war die Veranlassung zur Entdeckung der so allgemein bekannten Kegelschnittslinien, der Spirale, Schraubenlinien u. s. w., und die Vernachlässigung dieser Aufgabe in späterer Zeit war die Ursache, dass man seit zwei tausend Jahren bis jetzt keinen neuen Fortschritt im Gebiete der krummen Linien machen konnte.

Der Grund der Vernachlässigung dieser Aufgabe liegt grösstentheils in der von den alten Griechen gestellten Forderung selbst; aber auch darin, weil man jeden, der diese Auflösung unternehmen wollte, gewissermassen verhöhnte, indem man auf die Unmöglichkeit derselben hinwies.

Obschon durch die höhere Geometrie nachgewiesen wird, dass durch den Kreis und die gerade Linie allein die streng geometrische Auflösung der Trisection nicht möglich ist, so unternahm ich diese äusserst schwierige Aufgabe dennoch mit dem Vorsatze, dieselbe der von den alten Griechen gestellten Forderung gemäss so annähernd zu lösen, als es die praktische Genauigkeit fordert.

Nach zehnjähriger mühevoller Arbeit gelang es mir die Auflösung dieser Aufgabe, und zwar die der Trisection allein, auf mehr als hunderterlei Arten mathematisch richtig durch krumme Linien auszuführen, aus denen dann die in diesem Werke enthaltenen 48 Methoden abgeleitet wurden. Viele von diesen Methoden gehen bis 90° auf Minuten, viele aber bis 90° sogar auf Sekunden genau; daher diese Aufgabe gewiss so weit gelöst ist, als es die praktische Genauigkeit nur immer verlangen kann.

Vorausgeschickt wurden sechs Auflösungen über die Bisection, den Schluss bilden sechzehn Methoden über die Polysection mit mehreren neuen Polysectionscurven.

Bei der Bearbeitung dieses Werkes kam ich auf viele neue Constructionen; und es sind daher als Beitrag zur Geometrie drei Abhandlungen durch die k. k. Akademie der Wissenschaften bereits veröffentlicht worden. Mehrere andere, welche bereits druckfertig liegen, werden bald nachfolgen. Ebenso werden in meiner Geometrie mehr als fünfzig neue Constructionen enthalten sein.

Ausserdem gelang es mir bei der Bearbeitung dieser Aufgabe auf mehr als hundert neue Systeme mathematischer Linien zu kommen, welche desshalb von Interesse und Bedeutung sind, weil die meisten dieser Linien, in sich selbst zurückkehrend, äusserst regulär und von verschiedenartigen Formen sind, welche mit den in der Natur vorkommenden Gebilden eine besondere Ähnlichkeit haben.

Da man, wie bekannt, in der höheren Geometrie nur einige wenige in sich selbst zurückkehrende Linien hat, ausser diesen aber nur astförmige kennt, so wird die Geometrie mit Veröffentlichung dieses Werkes einen Schritt vorwärts machen. So gehören z. B. die Eilinie (Oval), Ellipse, Parabel und viele andere ähnliche in sich selbst zurückkehrende Linien zu einem meiner Systeme, von welchem Systeme man aber nur zwei Linien kennt, d. i. die Ellipse und die Parabel. Ebenso ist die für die Eilinie von mir abgeleitete Gleichung eine allgemeine, aus welcher sich auch die der Ellipse, Parabel und vieler andern ähnlichen in sich selbst zurückkehrenden Linien finden lassen.

Nach dem Urtheile der Sachkundigen, welche Gelegenheit hatten die genannten krummen Linien zu sehen, werden dieselben für die Naturhistoriker von besonderem Interesse und Gewichte sein.

Das Werk über diese neuen Curven ist so umfangreich, dass es nur theilweise veröffentlicht werden kann, wozu ich mit dem vorliegenden Werke den Anfang mache. Man hat dabei mit solchen Schwierigkeiten zu kämpfen, die nur ein Sachkundiger leicht einsehen kann. Denn nicht nur das Auffinden, sondern auch das Zeichnen und Rechnen ist mit grossen Schwierigkeiten verbunden, weil das eine dem andern die Hand bieten muss.

Dass man bis jetzt keine andern Linien als die der Alten kennt, kommt daher, weil man in der gesammten Geometrie mehr rechnet als zeichnet und mit besonderer Vorliebe klafterlange Rechnungen und Formeln entwickelt. Es wird also im Allgemeinen gesagt, entweder gerechnet und nicht gezeichnet, oder es wird gezeichnet und nicht gerechnet.

Es ist daher ein zweiter wichtiger Grund, warum die Geometrie der Curven auf gleicher Höhe blieb, der, weil man die constructive Seite der gesammten Geometrie, einen von den alten

Griechen hochgeschätzten und entwickelten Zweig der Wissenschaft, d. i. die geometrische Analysis bedeutend vernachlässigte. Die Hauptursache dieser Vernachlässigung ist aber nur in der Verwechslung zwischen der Methodik der Wissenschaft und dem Systeme derselben zu suchen.

Man fängt wohl an, besonders in Deutschland, nach und nach schon in den Schulen die geometrische Analysis als einen für sich bestehenden Gegenstand einzuführen; und es sind auch darüber mehrere vortreffliche Werke in Deutschland erschienen, welche als Leitfaden zu dienen haben.

Mit Recht hat die Oberschulbehörde Württembergs in denjenigen höheren Realanstalten, welche zur Vorbereitung für künftige Polytechniker bestimmt sind, als stehendes Fach die geometrische Analysis eingeführt. Dadurch wird also bezweckt, dass der mathematische Unterricht an den Lehranstalten das werde, was er werden soll und werden kann, also kein todter Mechanismus des Wissens, sondern eine lebendige Geistes-Gymnastik; denn durch geometrische Analysis wird dem Schüler insbesondere klar, auf welche Weise man zu den in Büchern vorhandenen Auflösungen gekommen sei; und dadurch bekommt der Schüler ein Mittel an die Hand sich bei solchen Aufgaben, welche in den Sammlungen nicht stehen, selbst helfen zu können, also selbstthätig bei seinen mathematischen Arbeiten zu Werke zu gehen; denn eine einzige von dem Schüler selbst gelöste Aufgabe stärkt seine Kraft mehr, als ein Dutzend solcher Aufgaben, deren Lösung ihm vorgemacht wird.

Dass Archimedes sicher der grösste Meister in der geometrischen Analysis war, ist wohl bekannt; allein weil er sich in seinen Schriften blos des synthetischen Vortrages bedient, so hat er so zu sagen die Leiter, auf welcher er zu seinen Entdeckungen gelangte, seinen Nachfolgern nicht gegeben; daher darf es uns auch nicht

befremden, dass die Zeiten nach ihm, — Apollonius ausgenommen, — so arm an Entdeckungen sind. Denn nicht jedes Jahrhundert kann solche Männer hervorbringen, und da dieser damals die geometrischen Untersuchungen so weit gefördert hatte, als sie aus blosser Construction sich herleiten liessen, ferner soweit als es der Zustand der griechischen Arithmetik erlaubte, die er auf die Geometrie angewandt hatte, ja auch soweit, dass diese Ergebnisse für die Anwendung in der Praxis hinreichend waren, so blieb den Nachfolgern, die keine Archimedes waren, wenig Nachlese übrig.

Erst in der neuesten Zeit wurde von Descartes die analytische Geometrie entdeckt, der zuerst Abscissen und Ordinaten anwandte und durch Gleichungen zwischen ihnen das Wesen der krummen Linien darstellte. — Durch diese glückliche Idee gab Descartes der Geometrie eine Eleganz in ihrem Vortrage und eine Allgemeinheit in ihren Resultaten, die bei der früheren Behandlungsweise nicht zu erreichen war. Diese Vorzüge wurden von seinen Nachfolgern bald anerkannt und von Newton, Leibnitz, Euler, dann in unseren Tagen von Lagrange, Laplace und Monge zu einer neuen und herrlichen Wissenschaft geschaffen; allein da man eben dadurch, sobald bei der Lösung geometrischer Probleme die nöthigen Gleichungen gebildet sind, fast blindlings auf eine mechanische Art zum Ziele gelangt, so bekümmert man sich dabei nur wenig um die Construction, da man höchstens die Endausdrücke construirt, und es müssen diese Constructionen auf die Einfachheit und Feinheit Verzicht leisten, die aus der geometrischen Analysis hervorgehen müssen. Es war daher diese neue Entdeckung zugleich Ursache, dass die constructive Geometrie sich nicht über die Schranken einer handwerksmässigen Kenntniss erhob.

Man hat daher selbst mit Hilfe dieser neuen Wissenschaft rücksichtlich der krummen Linien keine neue Entdeckung gemacht,

und blieb in der höheren Geometrie noch immer bei den Kegelschnittslinien, so zwar, dass diese Linien die Elemente der höheren Analysis bilden. Aber auch in den grösseren Werken, wie z. B. in dem sonst geschätzten Werke »System der analytischen Geometrie II. B. von Dr. J. Plücker» sieht man ausser einigen in sich selbst zurückkehrenden Linien nur astförmige mit oder ohne Schlingen versehene Curven.

Man kann also mit Hilfe der analytischen Geometrie viele Probleme lösen, insbesondere aber die Gleichungen der Curven dann darstellen, sobald man bei einer oder der anderen derselben ein gewisses Gesetz zwischen den Coordinaten eines jeden Punktes kennt. Umgekehrt können aus einer bekannten Gleichung einer Curve alle Eigenschaften derselben gefolgert werden, welches alles nach bestimmten allgemeinen Regeln geschieht.

Ganz anders aber ist das Verfahren vom Standpunkte der reinen Geometrie aus. Von allgemeinen Verfahrungsmethoden kann hier keine Rede sein, weil jede einzelne geometrische Aufgabe als Individuum erscheint, welche eine individuelle Behandlung verlangt; und da die verschiedenen Constructionen der vielseitigsten Arten von Aufgaben auf den verschiedensten Lehrsätzen beruhen, so ist es Sache einestheils der genügenden theoretischen Kenntnisse der Elementargeometrie und anderntheils des Scharfsinnes, damit bei jeder Aufgabe auch wirklich der passende Lehrsatz demjenigen einfalle, der sich mit der Lösung dieser Aufgabe beschäftigt. Denn die Vorbereitung zur Analysis oder die Ziehung der Hilfslinien ist das Schwierigste bei der Sache und gerade das ist, wofür es keine allgemeinen Regeln gibt, welches also nur durch Nachdenken und Uebung im Auflösen der schon gelösten und noch nicht gelösten Aufgaben erreicht werden kann.

Die geometrische Analysis ist also für alle jene, welche ihren

Verstand in der Combinirung der Wahrheiten und der strengen logischen Schlussfolgen üben und schärfen wollen, bei weitem jeder andern Methode vorzuziehen. Und diese Methode, welche man die Methode der Alten desshalb nennt, weil sie sich derselben bei der Auflösung der geometrischen Probleme bedienten, wurde bis jetzt bedeutend vernachlässigt.

Im Allgemeinen kann man die analytische Methode die Erfindungsmethode heissen, weil sie wirklich die Mittel darbietet, Erweiterungen und Entdeckungen zu machen. Durch diese Methode gelang es den alten Griechen in der Geometrie die Fundamente einer wissenschaftlichen Behandlung zu gründen und darauf ein System zu bauen, welches noch jetzt Staunen und Ehrfurcht erweckt. Dies glückte den alten Griechen desshalb, weil sie diese, so wie auch andere Wissenschaften rein aus Vorliebe dafür betrieben und betreiben durften; denn es lehrt uns die Geschichte, dass Hyppokrates von Chio (450 v. Ch.), weil er zuerst in Athen ums Geld Geometrie lehrte, von den Pythagoräern aus ihrer Gemeinschaft ausgeschlossen wurde. Es hatte daher bei den Griechen die Wissenschaft als Wissenschaft einen besonderen Werth, auch abgesehen vom Nutzen der Anwendung; und dies ist die Ursache, warum diese Wissenschaft in der platonischen Schule jene Höhe als Grundpfeiler erreichte.

Mit Hilfe dieser Grundlage und der analytischen Geometrie macht man in unsern Tagen bedeutende Fortschritte in der gesammten Mathematik, welches wohl jedem Freunde dieser Wissenschaft aus den mathematischen Zeitschriften, wie auch aus den einzelnen neuen Abhandlungen bekannt ist.

Ich kam durch die geometrische Analysis auf obgemeldete Linien, und die analytische Geometrie oder die Coordinatenlehre hilft mir deren weitere Eigenschaften zu untersuchen, und so, wie

man es zu thun pflegt, nach dem Grade der ihnen entsprechenden Gleichungen selbe in Ordnungen zu bringen. — Was die oberwähnten Systeme betrifft, so erhalten sie diesen Namen von einem Gesetze, welchem alle Curven im allgemeinen unterworfen sind, welches ich aus den bereits circa zwei tausend berechneten und construirten Curven schliessen kann. Es gibt also ein Princip, nach welchem alle nur möglichen Linien construirt werden, und dies werde ich mit nächstem bekannt machen.

Indessen gebe ich mich schliesslich der Hoffnung hin, dass das vorliegende Werk, welches ich rein aus Vorliebe für die Wissenschaft bearbeitet habe, und welches durch die Munifizenz des Herrn Verlegers so schön ausgestattet wurde, eine beifällige Aufnahme findet, wodurch ich für meine Mühe und mein redliches Streben zum Theile belohnt werde.

Geschrieben in Wien, im Jahre 1859.

Nikolaus Fialkowski,
der Verfasser.

Inhalt.

Polysection.

Anhang:

Einleitung.

Kurz vor Plato erregten zwei Aufgaben die volle Thätigkeit aller damaligen Geometer, und wenn auch die erste, obwohl genügend aufgelöst, doch nicht dafür in damaliger Zeit anerkannt wurde, die zweite hingegen die Kräfte der noch allzu jungen Wissenschaft überstieg, so danket man doch den Bestrebungen dessfalls eine bedeutende Anzahl schöner Entdeckungen, worunter auch die Kegelschnitte gehören.

Die erste Aufgabe, die Delische, ist die bei den Alten so berühmte Aufgabe von der Verdoppelung eines Würfels, d. i. die Seite eines Würfels zu finden, welcher doppelt so gross ist, als ein gegebener.

Die Veranlassung dazu wird auf folgende Art erzählt: Als Pest und Krieg Griechenland verheerte, fragte man Apollo's Orakel zu Delos, was zu thun sei, um von diesem Uebel befreit zu werden. Das Orakel antwortete: Verdoppelt den Altar. Nun war dieser ein Würfel und die Griechen suchten dieser Forderung dadurch zu genügen, dass sie den Altar doppelt lang, breit und hoch machen wollten, allein umsonst; — Pest und Krieg hörten nicht auf. Da wurde ihnen erklärt, dass dann der Altar verachtfacht, und nicht verdoppelt würde. Es entstand nun die grosse Schwierigkeit, die Seite eines Würfels zu finden, der doppelt so gross als ein gegebener ist.

Plato, den manche Neuere für die Stimme des Orakels halten, erklärte den Sinn derselben dahin: Der Gott wolle, dass die Griechen, statt durch ewige Streite sich das Leben wechselseitig zu verbittern, dasselbe durch Wissenschaft veredeln sollten.

Die zweite Aufgabe, welche in der Platonischen Schule aufkam, und mit welcher die grössten Geometer des Alterthums sich

fruchtlos beschäftigten, ist die Trisektion, d. i. die Theilung eines geradlinigen Winkels in 3 gleiche Theile. Nachdem man die Methode kannte, einen beliebigen Winkel geometrisch in zwei gleiche Theile zu theilen, so war es ganz natürlich, dass man über die Art und Weise nachdachte, wie man einen solchen geometrisch in drei gleiche Theile theilen könnte.

So leicht nun diese Aufgabe zu sein scheint, so schwierig ist sie in der That doch, und übersteigt die Kräfte der antiken geometrischen Construction, welcher die Alten bloss Zirkel und Lineals erlaubten.

Der Grund der Schwierigkeit liegt darin, dass die Analysis auf jede gegebene Frage, alle auf diese passende Antworten gibt, und nicht bloss diejenige, welche man im Sinne hat. Hat man nämlich einen Winkel $BAC = \alpha$, den die Geraden BA und CA bilden, im Auge, so kann dieser Winkel entstanden sein, indem man die Gerade BA um den Winkel von α^0 von AC wegdrehe (und diesen Winkel muss man gewöhnlich im Auge haben), oder zweitens, wenn man AB um volle 4 rechte Winkel, und noch um α^0 von AC wegdreht, und drittens, wenn man die AB zweimal um und um und noch um α^0, d. h. um $2 . 360 + \alpha^0$ von AC wegdreht u. s. w.

Der Winkel ABC stellt uns also unzählige Neigungen der Linien BA und AC vor, welche sich alle um ein, zwei, drei, vier u. s. w. völlige Umdrehungen von einander unterscheiden. Will man nun den Winkel $BAC = \alpha$ in mehrere gleiche Theile theilen, so hat man zugleich $360 + \alpha$, $2 . 360 + \alpha$, $3 . 360 + \alpha$ u. s. w. in eben so viele gleiche Theile zu theilen.

Ist also ein Winkel α zu halbiren, so ist eigentlich jeder der folgenden Winkel: α, $\alpha + 360$, $\alpha + 2 . 360$, $\alpha + 3 . 360$ u. s. w. zu halbiren, das gibt:

$$\frac{\alpha}{2}, \ \frac{\alpha}{2} + 180, \ \frac{\alpha}{2} + 360, \ \frac{\alpha}{2} + 360 + 180 \text{ u. s. w.}$$

Dieses gibt zwei verschiedene Auflösungen $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\alpha}{2} + 180$, weil die Winkel $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\alpha}{2} + 360$, $\frac{\alpha}{2} + 180$ und $\frac{\alpha}{2} + 180 + 360$ u. s. w. durch dieselbe Construction gegeben sind.

Halbire ich nun auf die gewöhnliche Art einen Winkel, und verlängere die Halbirungslinie über den Scheitel hinaus, so sind

dadurch die Winkel $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\alpha}{2} + 180^0$ construirt, daher in diesem Falle die Auflösung sehr leicht.

Um also auf unseren bestimmten Fall zurückzukommen, soll ein Winkel α in 3 gleiche Theile getheilt werden, so muss:

$$\alpha + 360^0,\ \alpha + 2 \,.\, 360^0,\ \alpha + 3 \,.\, 360 + \ldots$$

in 3 gleiche Theile getheilt werden. Die dritten Theile dieser Winkel sind aber:

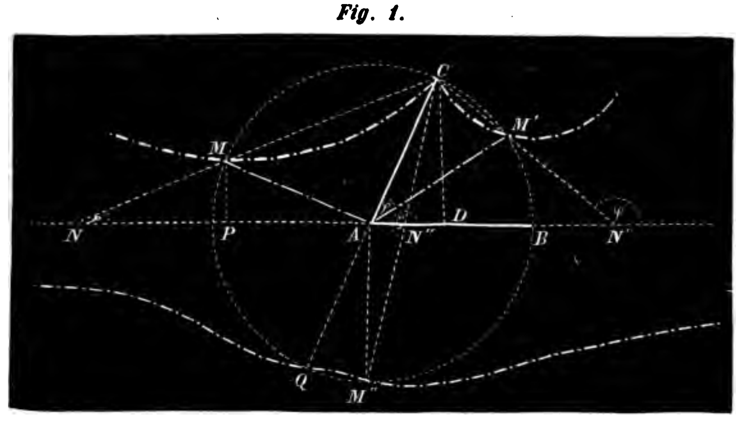
$$\frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} + 120,\ \frac{\alpha}{3} + 240,\ \frac{\alpha}{3} + 360,\ \frac{\alpha}{3} + 360 + 120,$$

$$\frac{\alpha}{3} + 360 + 240,\ \frac{\alpha}{2} + 2 \,.\, 360 \text{ u. s. w.}$$

so dass also drei verschiedene Constructionen, die von $\frac{\alpha}{3}$, $\frac{\alpha}{3} + 120$, $\frac{\alpha}{3} + 240$ alle diese Winkel gegeben; da in der Construction der Winkel $\frac{\alpha}{3}$ und der von $\frac{\alpha}{3} + 360^0$, der von $\frac{\alpha}{3} + 120$ und der von $\frac{\alpha}{3} + 120 + 360$ u. s. w. nicht unterschieden sind.

Die Aufgabe also, einen gegebenen geradlinigen Winkel in 3 gleiche Theile zu theilen, lässt drei verschiedene Auflösungen zu; und die Analysis muss eine Gleichung des dritten Grades geben, welche sich blos mit Kreis und gerader Linie nicht construiren lässt, daher ist es leicht begreiflich, dass die Versuche dessfalls der ausgezeichnetsten Geometer des Alterthums fruchtlos sein mussten.

Fig. 1.



Dessenungeachtet ist es erstaunlich, wie sehr sie die Auflösung dieser Aufgabe vereinfacht, und auf ein leichtes mechanisches Verfahren reduzirt hatten. Sie sagten nämlich, will man den Winkel **CAB** (Fig. 1)

in drei gleiche Theile theilen, so beschreibe man aus dem Scheitel A des Winkels (als dem Mittelpunkte) mit einem beliebigen Halbmesser AC eine Kreislinie, und nun bewege man durch den Punkt C die Kante eines Lineals so lange, bis ein Stück der Kante des Lineals MN, welches zwischen dem Schenkel AB (welcher verlängert wird, und zwischen der Peripherie liegt) entsteht, welches gleich ist dem Halbmesser des Kreises, so ist dann der Winkel CNA der dritte Theil des gegebenen Winkels CAB.

Der Beweis dafür ist sehr einfach:

Bezeichnet man den Winkel CAB mit α, und den Winkel CNA mit φ, so ist

da $$MN = AM \text{ ist,}$$
auch $$\measuredangle\ MAN = \varphi,$$
folglich $$\text{der } \measuredangle\ CMA = MNA + NAM = 2\varphi,$$
daher, weil $$MA = CA \text{ ist,}$$
$$\measuredangle\ AMC = ACM = 2\varphi,$$
daher $$\measuredangle\ CAB = CNA + NCA = \varphi + 2\varphi,$$
oder $$\alpha = 3\varphi,$$
und somit $$\measuredangle\ \varphi = \frac{\alpha}{3} \text{ w. z. B. w.}$$

Könnte man nun den Punkt N durch geometrische Construction finden, so wäre die Aufgabe vollkommen gelöst; allein dieses ist nicht der Fall, indem der Punkt N durch diese angegebene mechanische Construction so zu sagen nur errathen wird.

Hätten die alten Geometer die angeführte Auflösung consequent verfolgt, so hätten sie die Mehrheit der Auflösungen schon durch diese mechanische Construction gefunden, indem nicht bloss der Punkt M die Eigenschaft hat, dass das Stück der durch C und ihn gezogenen Geraden, welches zwischen ihm und der Peripherie des Kreises liegt, gleich dem Halbmesser desselben ist; denn diese Eigenschaft kommt auch den Punkten M', M'' und Q zu, so dass der stumpfe Winkel bei N', d. i. φ, und der erhabene Winkel bei N'', d. i. φ'', als Auflösungen gegeben werden, da man nämlich immer die Winkel nehmen muss, welche die Richtungen von N nach M, von N' nach M', von N'' nach M'' mit der oberen Seite der AB bildete.

Es ist auch $\measuredangle\ M'N'A = 180^0 - \varphi'$,

daher, weil $M'N' = M'A$

$$\measuredangle\ M'AN' = M'N'A = 180^0 - \varphi',$$

daher $\sphericalangle\ CM'A = M'AN' + M'N'A = 2\,(180^0 - \varphi')$,
daher, weil $AC = AM'$ ist, $\sphericalangle\ ACM' = CM'A = 2\,(180^0 - \varphi')$;
da nun $\sphericalangle\ CAN' = 180^0 - ACN' - ANC$ ist, so hat man:
$\alpha = 180^0 - 2\,(180^0 - \varphi') - (180^0 - \varphi')\ \alpha = 3\,\varphi' - 360$,
daher $3\,\varphi' = \alpha + 360^0$,
also $\varphi' = \frac{1}{3}\,(\alpha + 360)$.
Eben so ist

$$\sphericalangle\ AN''M'' = \varphi'' - 180^0$$

und da

$$AM'' = M''N'' \text{ ist,}$$

so hat man $\sphericalangle\ N''AM'' = \varphi'' - 180^0$,
daher $\sphericalangle\ AM''N'' = 180^0 - 2\,(\varphi'' - 180^0) = 3\,.\,180^0 - 2\varphi''$,
daher $\sphericalangle\ ACM'' = 3\,.\,180^0 - 2\,\varphi''$,
daher $\sphericalangle\ CAM'' = 180^0 - 2\,(3\,.\,180^0 - 2\,\varphi'') = 4\,\varphi'' - 5\,.\,180^0$;
nun ist aber $\sphericalangle\ CAM''$ auch $= \alpha + N''AM'' = \alpha + \varphi'' - 180^0$,
daher hat man

$$\alpha + \varphi'' - 180^0 = 4\,\varphi'' - 5.180^0,$$

daher $\alpha + 2\,.\,360^0 = 3\,\varphi''$
also $\varphi'' = \frac{1}{3}\,(\alpha + 2\,.\,360)$.

Diese Auflösung ist aber trotz ihrer Allgemeinheit nicht als eine rein wissenschaftliche zu betrachten, indem alle 3 Punkte M, M', M'' durch eine mechanische Construction so zu sagen errathen werden.

Um nun eine eigentliche geometrische Auflösung zu geben, muss man untersuchen, in welcher Kurve die Punkte liegen, und durch den Durchschnitt dieser Kurve mit der Kreislinie sind diese Punkte gegeben. Offenbar leisten die Punkte M, M', M'' . . . der Gleichung des Kreises Genüge.

Um nun die Gleichung einer andern Kurve zu untersuchen, in der sie noch liegen, muss man untersuchen, welcher andern Relation sie noch entsprechen.

Wird vom Punkte C das Perpendikel CD auf die Gerade AB gefällt, wird ferner der Punkt D als Anfangspunkt, die AB als Abscissenaxe, die untere Seite der AB als die Richtung der positiven angenommen, so dass also die oberen y die negativen seien.

Es sei ferner

$$CD = a,\ CA = b,$$

so ist:

$DP = x$, $MP = -y$, $ND = DP + NP$, $PN = \sqrt{b^2 - y^2}$,

daher
$$ND = x + \sqrt{b^2 - y^2}$$
nun ist aber
$$\frac{MP}{NP} = \frac{CD}{ND},$$
d. h.
$$\frac{-y}{\sqrt{b^2 - y^2}} = \frac{a}{x + \sqrt{b^2 - y^2}},$$
daher
$$x = \frac{(a+y)\sqrt{b^2 - y^2}}{y}$$
und dieses ist die Gleichung der Conchoide.

Will man also einen Winkel in 3 gleiche Theile theilen, so schneide man von dem einen Schenkel ein beliebiges Stück CA ab, und nun beschreibe man eine Conchoide, deren Spitze in C, deren Achse der andere Schenkel AB ist, und wo die Entfernung von je 2 correspondirenden Punkten der Conchoide $= CA$ ist. Die so construirte Conchoide schneidet den vom Mittelpunkte A mit dem Radius CA beschriebenen Kreis in 4 Punkten, welche mit dem Mittelpunkte verbunden, die Geraden geben, die mit der Achse AB die Drittelwinkel bilden, ausgenommen eine Gerade, welche den Winkel selbst gibt.

Die Entdeckung der Conchoide, so wie ihre Anwendung zur Auflösung des Delischen Problemes und der Trisection ist vom Nicomedes, der ungefähr 200 Jahre vor Christi lebte, also viel später als Euklides; hier wird es des Zusammenhanges wegen angeführt.

Durch elementare Methode lässt sich die Trisection wenigstens annähernd, und zwar mit so kleinem Fehler als man nur will, bewerkstelligen.

Wird nämlich der gegebene Winkel in 4 gleiche Theile getheilt, der 4te Theil wieder in 4, der 16te wieder in 4 u. s. w. gleiche Theile getheilt, so hat man:
$$\frac{a}{4} + \frac{a}{4^2} + \frac{a}{4^3} + \frac{a}{4^4} + \ldots$$
$$= a\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots \text{ins } \infty\right) = \frac{a}{3}.$$
Werden hier nur die 4 ersten Glieder genommen, so ist der Fehler $= \frac{a}{786}$, d. i. wenn $\alpha = 90^0$ ist, $= 7'1''\cdot875$, oder im Bogen $= 0\cdot002041$ in Theilen des Halbmessers.

Diess ist nun beinahe alles, was man bis auf die neueste Zeit für die Trisection des Winkels gethan hat, wie es der verstorbene Professor Dr. L. C. Schulz von Strasznitzky in seiner Geschichte der Geometrie, 1835, S. 308, anführt,

Letztere Methode der Trisection eines jeden beliebigen Winkels ist dem Verfasser aus dem Jahresberichte für Mitglieder der Hamburgischen Gesellschaft zur Verbreitung mathematischer Wissenschaften, Hamburg 1. August 1850, bekannt.

Diese Methode ist aber fast ganz dieselbe, wie sie der soeben genannte, leider zu früh für die Wissenschaft verstorbene Mathematiker, in seiner Geometrie; S. 308, 1. Aufl., bereits 1835 bekannt gemacht hat, nur mit dem Unterschiede, dass man in der bereits angeführten Reihe positive und negative Werthe einführt, wodurch eine sehr schnell convergirende Reihe erhalten wird.

Bekanntlich kann man jeden beliebigen Winkel biseciren, d. h. in 2 gleiche Theile theilen. Dieser Umstand gibt uns ein Mittel an die Hand, die Trisection eines Winkels, die direct durch Kreis und gerade Linie nicht zu erreichen ist, doch ohne etwas anderes, als diese Hilfsmittel zu gebrauchen, so nahe, wie man will zu kommen, so nahe, dass der Unterschied kleiner als die kleinste möglicher Weise angebbare Grösse wird, oder als verschwindend zu betrachten ist.

Hierzu muss man ein mächtiges Werkzeug, dessen sich die Analyse bedient, auch für die Geometrie borgen, d. i. die Reihe oder Summe von ohne Ende fortlaufenden, nach demselben Gesetze gebildeten, immer kleiner und kleiner werdenden Gliedern, die einer festen Grenze so nahe, wie man will, kommen.

Die bereits angeführte Reihe, allgemein ausgedrückt, ist folgende:

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \ldots \text{u. s. w.},$$

die man sich unaufhörlich fortgesetzt denken muss, und die nach demselben Gesetze fortschreitet, dass jedes folgende Glied aus dem vorhergehenden durch Multiplication mit $\frac{1}{x}$ entsteht. In dieser Reihe nehmen die Glieder, wenn x grösser als 1 ist, immer mehr und mehr ab, und die Summe aller Glieder nähert sich, je mehr Glieder man nimmt, immer mehr und mehr einer festen Grenze, die sie nie

überschreiten kann. Man übersieht diese leicht, wenn man für x irgend eine Zahl setzt, die grösser als 1 ist, z. B. 2.

Es ist dann die Summe der ersten

$$2 \text{ Glieder} = 1 + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{1}{2},$$
$$3 \quad „ \quad = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 1 + \tfrac{3}{4},$$
$$4 \quad „ \quad = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = 1 + \tfrac{7}{8},$$
$$5 \quad „ \quad = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} = 1 + \tfrac{15}{16},$$
$$6 \quad „ \quad = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} = 1 + \tfrac{31}{32},$$

. . . .

$$20 \text{ Glieder} = 1 + \tfrac{1}{2} + \dots + \tfrac{1}{524288} = 1 + \tfrac{524287}{524288},$$

. . . .

$$30 \quad „ \quad = 1 + \tfrac{1}{2} + \dots + \tfrac{1}{536870912} = 1 + \tfrac{536870911}{536870912}.$$

. . . .

$$40 \quad „ \quad = 1 + \tfrac{1}{2} + \dots + \tfrac{1}{549755813888} = 1 + \tfrac{549755813887}{549755813888}$$

u. s. w. u. s. w.

Jede solche Summe besteht, wie man sieht, aus 1 und aus einem Bruche, der nie grösser als 1 werden kann, weil der Zähler immer um eine Einheit kleiner als der Nenner ist, der aber dem Werthe 1 so nahe als man will, kommen kann, weil der Nenner jedes folgenden Bruches zweimal grösser als der Nenner des vorhergehenden Bruches ist. Weil man nun keine, auch noch so kleine Grösse angeben kann, um die dieser Bruch von 1 verschieden ist, indem man bei jeder Angabe die Reihe nur um 1 Glied fortzusetzen braucht, um einen halb so kleinen Unterschied zu erhalten, so kann man den Bruch $= 1$ setzen, und die Summe der unaufhörlich fortgesetzten Reihe ist:

$$= 1 + 1 = 2.$$

Eben das folgt, wenn man bei jeder Anzahl von Gliedern den Unterschied der Reihe von 2 betrachtet.

Wie wir bereits gesehen haben, ist die Summe der Reihe

$$\text{für } 2 \text{ Glieder} = 1 + \tfrac{1}{2} = 2 - \tfrac{1}{2},$$
$$„ \quad 3 \quad „ \quad = 1 + \tfrac{3}{4} = 2 - \tfrac{1}{4},$$
$$„ \quad 4 \quad „ \quad = 1 + \tfrac{7}{8} = 2 - \tfrac{1}{8},$$
$$„ \quad 5 \quad „ \quad = 1 + \tfrac{15}{16} = 2 - \tfrac{1}{16},$$
$$„ \quad 6 \quad „ \quad = 1 + \tfrac{21}{32} = 2 - \tfrac{1}{32},$$

. . . .

$$„ \quad 20 \quad „ \quad = 1 + \tfrac{524287}{524288} = 2 - \tfrac{1}{524288}$$

. . . .

für 30 Glieder $= 1 + \frac{536870911}{536870912} = 2 - \frac{1}{536870912}$

. . . .

„ 40 „ $= 1 + \frac{549755813887}{549755813888} = 2 - \frac{1}{549755813888}$

u. s. w. u. s. w.

Der Unterschied der Summe der Reihe von 2 wird mit jedem Gliede, das man mehr nimmt, um die Hälfte kleiner, und man kann diese Summe $= 2$ setzen, da man keine auch noch so kleine Grösse angeben kann, um die die Summe sich von 2 unterscheide. Es ist, um einen kleineren Unterschied zu erhalten, nur nöthig, die Reihe um ein Glied fortzusetzen.

Abgesehen von Zahlenentwickelungen und bei allgemeinen Zeichen bleibend, kann man auch leicht zeigen, dass

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \ldots \text{ u.s.w.}$$

sei, wobei man sich die Reihe unaufhörlich fortgesetzt denken muss. Man braucht nur 1 mit $1 - \frac{1}{x}$ zu dividiren, und man erhält:

$$1 : 1 - \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots$$

Da nun $\frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x}{x - 1}$, so ist

$$\frac{x}{x - 1} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \text{ u. s. w.},$$

oder wenn wir $x = 2$ setzen,

$$\frac{2}{2 - 1} = 2 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \text{ u. s. w.},$$

gerade so wie die früher gefundene.

Wenn wir nun in der eben betrachteten Reihe

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \text{ u. s. w.}$$

die Zeichen jedes geraden Gliedes ändern, so erhalten wir eine andere, sehr schnell sich einer bestimmten Grenze nähernde Reihe, deren Summe hier vorläufig mit S bezeichnet wird,

$$\text{also } S = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} - \text{ u. s. w.}$$

Diese unterscheidet sich von der ersten Reihe dadurch, dass S sich der Grenze von beiden Seiten nähert, indem sie abwechselnd darüber hinausgeht, und darunter bleibt, so dass Abweichungen mit jedem

neuen Gliede um $\frac{1}{x}$ kleiner werden, wohingegen sich die erste Reihe immer von einer und derselben Seite der Grenze nähert.

Die Summe dieser Reihe findet man leicht, wenn man 1 mit $1 + \frac{1}{x}$ dividirt, wo der Quotient dieser Division nämlich die Reihe selbst ist, oder es ist

$$S = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{x}{x+1}.$$

Man kann diess aber auch, da die Summe der ersten Reihe $\left(= \frac{x}{x-1}\right)$ schon bekannt ist, leicht so finden; es ist

$$\frac{x}{x-1} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \dots \text{ u. s. w.},$$

$$S = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} - \dots \text{ u. s. w.},$$

Addirt man diese beiden Gleichungen, und zieht die untere von der oberen ab, so erhält man:

$$\frac{x}{x-1} + S = 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^4} + \frac{2}{x^6} + \dots \text{ u. s. w.} =$$

$$2\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} \dots\right)$$

$$\frac{x}{x-1} + S = \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^5} + \frac{2}{x^7} + \dots \text{ u. s. w.} =$$

$$\frac{2}{x}\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} \dots\right)$$

Da nun, wenn man in der zuerst betrachteten Reihe

$$\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots \text{ u. s. w.},$$

x^2 für x setzt

$$\frac{x^2}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} + \dots \text{ u. s. w.}$$

ist, so werden beide Gleichungen

$$\frac{x}{x-1} + S = 2\,\frac{x^2}{x^2-1}$$

$$\frac{x}{x-1} - S = \frac{2}{x}\,\frac{x^2}{x^2-1} = \frac{2x}{x^2-1}.$$

Zieht man nun die untere Gleichung von der oberen ab, so erhält man

$$2S = 2 \cdot \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = 2 \cdot \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = 2 \cdot \frac{x}{x+1},$$

also wie vorher durch Division, $S = \frac{x}{x+1}$.

Es ist also, wenn wir $x = 2$ setzen,

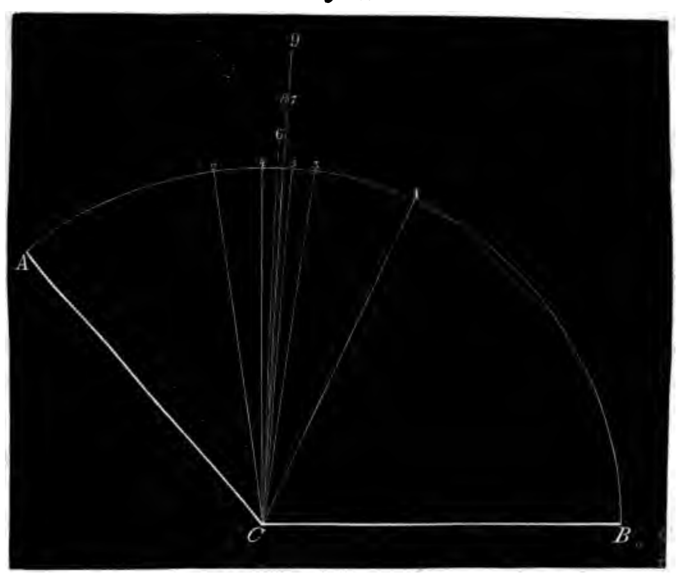
$$\frac{2}{2+1} = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} - \ldots \text{ u. s. w.}$$

oder mit 2 dividirt

$$\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} - \ldots \text{ u. s. w.};$$

diess ist nun die Reihe die uns durch Halbirungen auf die Trisection des Winkels führt.

Fig. 2.



Wenn man den Winkel $ACB = \alpha$ (Fig. 2) in 1 halbirt, so ist der Winkel $AC1 = \frac{1}{2}\alpha$,

halbirt man jetzt $AC1$ in 2 nach A hin, so ist der Winkel

$$AC2 = AC1 - 2C1 = \tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{4}\alpha,$$

halbirt man $2C1$ in 3 von A abwärts, so ist der Winkel

$$AC3 = AC2 + 2C3 = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{8}a,$$

halbirt man $2C3$ in 4 nach A hin, so ist der Winkel

$$AC4 = AC3 - 4C3 = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{8}a - \tfrac{1}{16}a,$$

halbirt man $4C3$ in 5 von A abwärts, so ist der Winkel

$$AC5 = AC4 + 4C5 = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{8}a - \tfrac{1}{16}a + \tfrac{1}{32}a,$$

und fährt so mit Halbirungen wechselweise nach A hin und von A abwärts fort, so fallen die halbirenden Linien so schnell gegen die Grenze zusammen, dass etwa nach dem 9. Halbiren die Linien sich noch dem Auge kaum als getrennt darstellen.

Die Figur zeigt noch:

$$AC6 = a\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} - \tfrac{1}{64}\right),$$
$$AC7 = a\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} - \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{128}\right),$$
$$AC8 = a\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} - \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{128} - \tfrac{1}{256}\right),$$
$$AC9 = a\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} - \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{128} - \tfrac{1}{256} + \tfrac{1}{512}\right),$$

oder, da die in Klammern eingeschlossene Reihe unaufhörlich fortgesetzt, $= \frac{1}{3}$ ist, so wäre mit der Genauigkeit, die die Zeichnung geben kann, schon

$$AC9 = \tfrac{1}{3}\, a.$$

Man kann aber durch fortgesetzte Halbirungen der Trisection des Winkels so nahe, wie man will, kommen, so nahe, dass der Unterschied kleiner als jede angebbare Grösse wird.

Allein diese Construction hat für das praktische Zeichnen gar keinen Werth; erstens weil man zu viele Halbirungen vornehmen muss, und zweitens, weil man die nach und nach kleiner und kleiner entstehenden Winkel geometrisch nicht so leicht nach dieser Art halbiren kann, aus welchen Gründen diese Methode beim praktischen Zeichnen nicht anwendbar ist.

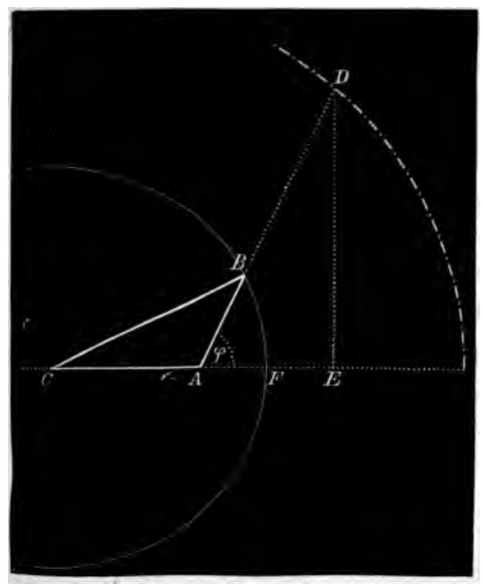
In dem allgemein bekannten Archiv der Mathematik und Physik von J. A. Grunert findet man folgende drei Lösungen der Trisection eines beliebigen Winkels:

I. Ueber die Auflösung der Delischen Aufgabe von Herrn Thomas Clausen zu Altona (Grunert's Archiv der Mathematik und Physik. Bd. II. p. 196.)

Die Chonchoide mit kreisförmiger Basis, obgleich eine Kurve vom sechsten und also höheren Grade als die Conchoide des Nikomedes, die nur vom vierten Grade ist, lässt sich zur Auflösung des Delischen Problems sehr einfach anwenden.

Da sie sich eben so einfach mechanisch beschreiben lässt, so ist es nicht uninteressant zu wissen, die geometrische Construction der Auflösung der Aufgabe oder überhaupt der Kubikwurzel aus einer beliebigen ganzen Zahl durch dieselbe zu entwickeln.

Fig. 3.



Der Punkt B (Fig. 3) der Linie AD bewegt sich auf dem Kreisumfange, dessen Mittelpunkt C ist, während die Linie beständig durch A geht, und der Punkt D auf derselben, dessen Entfernung von B constant ist, beschreibt die Kurve.

Es sei $AC = a$, $BC = b$, $BD = 3e$, $AD = r$, AE (DE ist senkrecht auf AC) $= x$, der Winkel $DAE = \varphi$.

In dem ebenen Dreiecke ABC ist

$b^2 = a^2 + 2a(r - 3e) \cos\varphi + (r - 3e)^2$.

$r^2 - 6er + 9e^2 + 2ar \cos\varphi - 6ae \cos\varphi + a^2 - b^2 = 0$,

und wenn man mit r multiplicirt, und $r \cos\varphi = x$ setzt:

$$r^3 - 6er^2 + (a^2 - b^2 + 9e^2 + 2ax)\, r - 6aex = 0.$$

Es sei diese Gleichung $(r - 2e)^3 = m e^3$, so wird

$12e^2 = a^2 - b^2 + 9e^2 + 2ax$, $me^3 = 6aex - 8e^3$, woraus

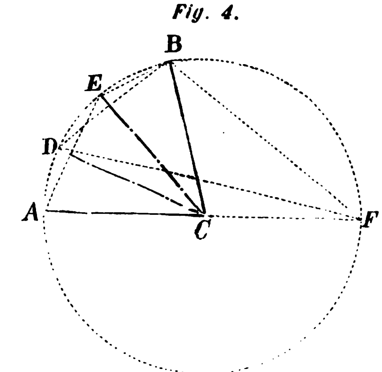
$$e^2 = \frac{3(a^2 - b^2)}{1 \; m}, \quad x = \frac{m + 8}{1 - m} \cdot \frac{a^2 - b^2}{2a}.$$

Es sei z. B. in der Delischen Aufgabe $m = 16$, so wird, wenn man $a = 2$, $b = 3$ setzt: $e = 1$, $x = 2$.

Nach diesem Verhältnisse ist die Figur gezeichnet, es ist nämlich

$AC = 2 \,.\, AF$, $BD = 3 \,.\, AF$, $FE = AF$, $AD - AE = AE\sqrt[3]{2}$.

Fig. 4.



II. Vom Herrn Divisions-Prediger Otto zu Stuttgart ist folgende bloss auf den ptolomäischen Lehrsatz gestützte, also von trigonometrischen Betrachtungen ganz unabhängige Auflösung der Aufgabe von der Trisection des Winkels bekannt. (Grunert's Archiv, 4. Bd. pag. 223.)

Es sei ACB (Fig. 4) der in 3 gleiche Theile zu theilende Winkel

und aus dessen Spitze C als Mittelpunkt mit dem beliebigen Halbmesser $AC = r$ ein Kreis beschrieben. Setzen wir die bekannte Sehne $AB = a$, $BF = k$, den bekannten Durchmesser $AF = d$, und $AD = DE = BE = x$, $AE = BD = y$, so liefert das in dem Kreise beschriebene Viereck $ADBE$ nach dem ptolomäischen Lehrsatze die Gleichung

$$x^2 + ax = y^2$$

und das in den Kreis beschriebene Viereck $ADBF$ liefert nach demselben Satze, weil $DF = \sqrt{d^2 - x^2}$ ist, die Gleichung
$kx + dy = a\sqrt{d^2 - x^2}$.

Durch Elimination von y erhält man aus diesen beiden Gleichungen

$$kx + d\sqrt{x^2 + ax} = a\sqrt{d^2 - x^2}.$$

Quadrirt man auf beiden Seiten, so kommt:

$$(k^2 + d^2)x^2 + ad^2x + 2kdx\sqrt{x^2 + ax} = a^2(d^2 - x^2),$$

oder

$$(k^2 + a^2 + d^2)x^2 + ad^2x + 2kdx\sqrt{x^2 + ax} = a^2d^2,$$

also weil $k^2 + a^2 = d^2$ ist, wenn man zugleich durch d dividirt:

$$2kx\sqrt{x^2 + ax} = d(a^2 - ax - 2x^2).$$

Quadrirt man nun auf beiden Seiten, so ergibt sich nach einigen leichten Reductionen, wobei man immer zu beobachten hat, dass $d^2 - k^2 = a^2$ ist, die Gleichung des vierten Grades

$$4x^4 + 4ax^3 - 3d^2x^2 - 2ad^2x + a^2d^2 = 0,$$

oder wenn man $d = 2r$ setzt, die Gleichung des vierten Grades

$$x^4 + ax^3 - 3r^2x^2 - 2ar^2x + a^2r^2 = 0,$$

mittelst welcher die gesuchte Sehne x, durch die der dritte Theil des gegebenen Winkels bestimmt wird, gefunden werden muss.

Beträgt der gegebene Winkel zwei rechte Winkel oder 180°, so ist $a = 2r$, und die Gleichung zur Bestimmung der Sehne x des dritten Theiles wird nach dem obigen

$$x^4 + 2rx^3 - 3r^2x^2 - 4r^3x + 4r^4 = 0.$$

Bekanntlich ist in diesem Falle $x = r$, und wirklich ist auch

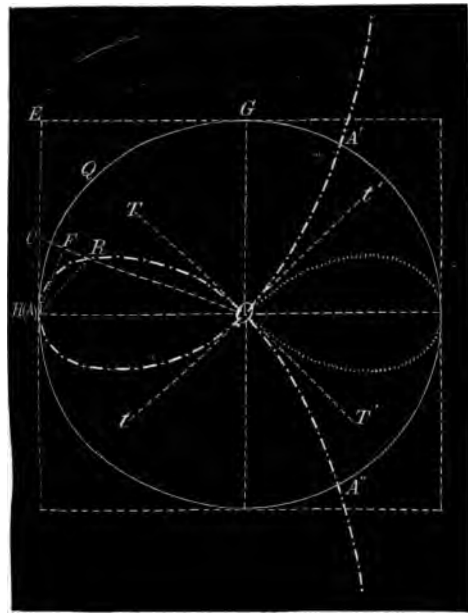
$$r^4 + 2r.r^3 - 3r^2.r^2 - 4r^3.r + 4r^4 = 0.$$

Allein auch dieses Verfahren hat für das praktische Zeichnen eben so wenig Werth, wie das vorhergehende.

III. Die Dreitheilung des Winkels mit Hilfe der Kurve der dritten Ordnung von dem Herrn Dr. J. R. Boymann, Gymnasial-Lehrer zu Koblenz. (Grunerts Arch. f. Mathem. u. Physik. 15. B. p. 205.)



Fig. 5.



Legt man durch den Anfangspunkt der Coordinaten eine beliebige, die Kurve schneidende gerade Linie OA (Fig. 5), welche den Nebenparameter HE oder dessen Verlängerung in dem Punkte C begegne.

Die Gleichung einer solchen, durch den Coordinaten-Anfang gehenden Geraden ist bekanntlich

$$y = \gamma \, . \, x;$$

daher ist $CH = \gamma \, . \, a$, und da $CE = EH - CH$, so ist

$$CE = b - \gamma a \ldots (1).$$

Seien ferner x_1 und y_1 die Ordinaten des Durchschnittspunktes A der Geraden OA mit der Kurve, und sei E mit A verbunden, so ist

$$AE = \sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2}.$$

Aus den beiden Gleichungen, der Kurve und der Geraden, in Beziehung auf diesen Durchschnittspunkt, nämlich:

$$x_1^3 - a x_1^2 - 2 b x_1 y_1 + x_1 y_1^2 + a y_1^2 = 0$$

und

$$y_1 = \gamma x_1.$$

findet man aber für die Coordinaten x_1 und y_1 des Durchschnittspunktes A folgende Werthe:

$$x_1 = \frac{a + 2 b \gamma - a \gamma^2}{1 + \gamma^2}, \; y_1 = \frac{a \gamma + 2 b \gamma^2 - a \gamma^3}{1 + \gamma^2};$$

substituirt man diese in den obigen Wurzelausdruck für EA, so ergibt sich nach Ausziehung der Wurzel und einigen nöthigen Reduktionen

$$EA = b - \gamma a \ldots (2.)$$

Aus (1) und (2) folgt nun, dass $EA = EC$, d, h. in Worten: Jede beliebige, durch den Anfangspunkt der Coordinaten gelegte gerade Linie schneidet den Nebenparameter oder dessen Verlängerung und die Kurve in zwei Punkten, welche von dem Endpunkte E die-

ses Parameters gleich weit entfernt sind; — diese drei Punkte bilden also immer ein gleichschenkeliges Dreieck, dessen Scheitel der Punkt *E* ist.



Fig. 6.

Diese Eigenschaft der Kurve gibt ein leichtes Mittel an die Hand, dieselbe durch eine Reihe von Punkten zu construiren und darnach hat dieselbe die Gestalt, wie Fig. 6 zeigt. Auch liesse sich wohl ein Instrument angeben, mittelst dessen man die Kurve durch einen continuirlichen Zug beschreiben könnte, indem man beobachtet, dass der Fusspunkt ***F*** der die Grundlinie ***AC*** des gleichschenkeligen Dreieckes halbirenden Senkrechten ***EF*** in der über ***OE*** als Durchmesser beschriebenen Kreislinie liegt, dass also die Durchschnittspunkte der Kurve und des Nebenparameters mit jeder durch den Coordinaten - Anfang gehenden ge-

raden Linie OA, nämlich A und C, von dem Durchschnittspunkte dieser Kreislinie mit derselben stets gleich weit entfernt sind.

In Folge dieser Eigenschaft ist man im Stande, die Trisection eines beliebigen Winkels vorzunehmen.

Sei nämlich ein beliebiger Winkel gegeben, dessen Scheitelpunkt O, so fälle man von irgend einem Punkte E des einen Schenkels auf den andern oder dessen Verlängerung eine Senkrechte EH, construire zu OH als Hauptparameter und HE als Nebenparameter nach dem früher Gesagten die Kurve *NOR DEOS* und beschreibe mit OE als Radius um O einen Kreis, welcher, wie man bereits gesehen hat, die Kurve ausser in E noch in drei Punkten, A, A' A'' schneidet. Man verbinde diese mit O und verlängere nöthigen Falls, wodurch man die Durchschnittspunkte C, C' C'' auf dem Nebenparameter erhält, und ferner verbinde man E mit den Punkten A, A' A''.

Alsdann sind die Dreiecke EAC, $EA'C'$, $EA''C''$ gleichschenkelig, mithin die folgenden Dreiecke paarweise einander ähnlich:

$$\triangle OAE \sim \triangle EAC,$$
$$\triangle OA'E \sim \triangle EA'C',$$
$$\triangle OA''E \sim \triangle EA''C'',$$

da sie gleichschenkelig sind, und jedes Paar den Winkel an der Grundlinie resp. $\measuredangle EAC$, oder $\measuredangle EA'C'$ oder den $\measuredangle EA''C''$ gemeinsam hat; daher ist

$$\measuredangle AEC = \measuredangle EOA,$$
$$\measuredangle A'EC' = \measuredangle EOA',$$
$$\measuredangle A''EC'' = \measuredangle EOA''.$$

Ebenso, wenn man aus E die Senkrechten EF, EF', EF'' fällt, sind die folgenden rechtwinkeligen Dreiecke paarweise ähnlich:

$$\triangle COH \sim \triangle CEF,$$
$$\triangle C'OH \sim \triangle C'EF',$$
$$\triangle C''OH \sim \triangle C''EF''.$$

Daraus ergibt sich nun:

$$\measuredangle AOP = \measuredangle COH = \measuredangle CEF = \tfrac{1}{2} \measuredangle AEC = \tfrac{1}{2} \measuredangle EOA;$$
$$\measuredangle A'OP' = \measuredangle C'OH = \measuredangle C'EF' = \tfrac{1}{2} \measuredangle A'EC' = \tfrac{1}{2} \measuredangle EOA';$$
$$\measuredangle A''OP' = \measuredangle C''OH = \measuredangle C''EF'' = \tfrac{1}{2} \measuredangle A''EC'' = \tfrac{1}{2} \measuredangle EOA'';$$

$$\measuredangle A''OP = (2R - C''OH = 2R - C''EF'') = \tfrac{1}{2}(4R - A''EC'')$$
$$= \tfrac{1}{2}(4R - EOA'').$$

Hieraus folgt nun:

$\measuredangle AOP = \frac{1}{3} \measuredangle EOP \ldots (\measuredangle EOP > 0^0)$ und $< 1\,R$,
$\measuredangle A'OP' = \frac{1}{3} \measuredangle EOP' \ldots (\measuredangle EOP' > 1\,R)$ und $< 2\,R$,
$\measuredangle A''OP' = \frac{1}{3}$ conv. $\measuredangle EOP' \ldots$ (conv. $\measuredangle EOP' > 2\,R$ und $< 3\,R$,
$\measuredangle A''OP = \frac{1}{3}$ conv. $\measuredangle EOP \ldots$ (conv. $EOP > 3\,R$ und $< 4\,R$.

Man sieht also, dass vermittelst dieser Kurve jeder beliebige Winkel, sei er ein spitziger oder ein stumpfer, oder ein erhabener, in drei gleiche Theile getheilt werden kann.

Da nun $\measuredangle AOP = \frac{1}{3} \measuredangle EOP$, und
$\measuredangle A''OP = \frac{1}{3}$ conv. $\measuredangle EOP$, ferner
$\measuredangle A'OP' = \frac{1}{3} \measuredangle EOP'$ und
$\measuredangle A''OP' = \frac{1}{3}$ conv. $\measuredangle EOP'$,

so ergibt sich endlich noch, dass in den Punkten A, A', A'' die ganze Kreislinie in drei gleiche Theile getheilt ist. (Grunert's Archiv für Mathematik und Physik Fig. 10 und 11.)

Diess ist nun fast Alles, was meines Wissens für die Trisection des Winkels seit den ältesten Zeiten bis auf die Gegenwart geschehen ist, und was einer näheren Betrachtung würdig ist.

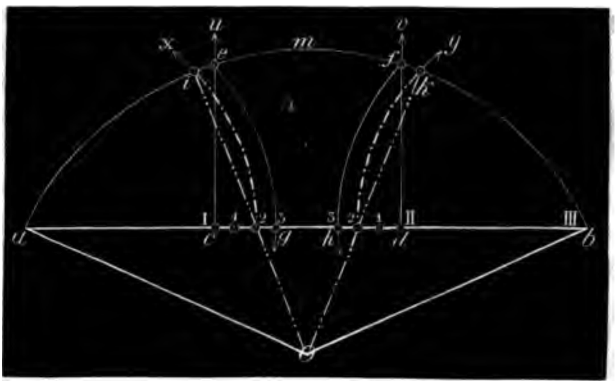
Da es nun ein streng mathematisches Verfahren nicht gibt, einen beliebigen Winkel nur mittelst des Zirkels und Lineals in drei gleiche Theile zu theilen (indem

$$1 : 3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4.4} + \frac{1}{4.4.4} + \frac{1}{4.4.4.4} + \frac{1}{4.4.4.4.4} + \ldots$$

ist, als 1 durch 3 nicht theilbar ist), so kann man doch wenigstens annäherungsweise durch fortgesetztes Halbiren sich einem Drittel so nähern, als die praktische Genauigkeit nur immer verlangt. Allein dieses Verfahren, und alle die bereits angeführten sind jedenfalls zu umständlich. Die praktischen Zeichner ziehen es daher vor, den Kreisbogen eines solchen Winkels durch Probiren in drei gleiche Theile zu theilen, wodurch dann, wenn die Theilungspunkte mit dem Scheitel des Winkels verbunden werden, auch der betreffende Winkel in drei gleiche Theile getheilt wird.

Albrecht Dürer, der berühmte Maler Deutschlands, gibt in seinem Werke: „Onderweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit“ 1538 folgendes interessante Verfahren:


Fig. 7.



Es sei ***amb*** (Fig. 7) der gegebene Bogen, ***ab*** dessen Sehne und ***aob*** der ihm entsprechende Winkel. — Man theile die Sehne ***ab*** in 3 gleiche Theile, errichte in den 2 Theilungspunkten ***c*** und ***d*** Lothrechte, bis der Bogen in ***e*** und ***f*** geschnitten ist, fasse die Entfernung ***ae*** in Zirkel und durchschneide damit die Sehne in ***g*** und ***h***; nun theile man ***cg*** so wie ***dh*** in 3 gleiche Theile und beschreibe durch den zweiten Theilungspunkt aus ***a*** und ***h*** die Bogen 2 ***i*** und 2 ***k***, wodurch der gegebene Bogen durch die 2 Punkte ***i*** und ***k*** in 3 gleiche Theile getheilt wird.

Verbindet man ferner die gefundenen Punkte ***i*** und ***k*** mit dem Scheitelpunkte ***o***, so ist dadurch auch der gegebene Winkel ***aob*** in 3 gleiche Theile getheilt; man hat also:

$$\text{arc. } ai = ik = kb = \tfrac{1}{3}\, amb$$

und

$$aoi = iok = kob = \tfrac{1}{3}\, aob.$$

Dieses Verfahren ist selbst bei grösseren Winkeln praktisch genau; bei kleinern Winkeln hingegen ist es wegen der Eintheilung, die dabei vorgenommen werden muss, etwas lästig.

Wie man aus der obigen Erklärung der Construction sieht, braucht man dabei nicht einmal den Mittelpunkt oder den Scheitelpunkt des diesem Bogen entsprechenden Winkels zu suchen, weil die ganze Construction zwischen dem Bogen und der ihr entsprechenden Sehne ausgeführt wird.

Die Punkte ***i*** und ***k*** können auch dadurch gefunden werden,

indem man aus *o* durch den zweiten Theilungspunkt der *cg* und *dh* Gerade führt.

Ausser den hier angeführten Methoden gibt es noch vielleicht manche andere, von denen mir nur noch folgende 4 bekannt sind: Winkeldreitheilung von Garnier 1789, Winkeltheilung von Hadaly, dann die Dreitheilung des Winkels von Malcarne und eine von Sluzewski. — Allein auch diese so wie die vorhergehenden haben für die Theorie nur einen geringen und für die Praxis fast gar keinen Werth.

Da es jedoch für den praktischen Zeichner sehr wünschenswerth ist, eine annähernde, jedoch einfache, und für die Praxis hinreichend genaue Methode der Trisection eines beliebigen Winkels zu wissen, so war ich bemüht, die circa 100 solche von mir bereits vor Jahren aufgefundenen Methoden näher zu untersuchen und zu berechnen und dadurch sowohl für die Geometrie als auch für das constructive Zeichnen einen Beitrag zu liefern. Die hier nachfolgenden circa 140 Constructionen sind höchst einfach, zugleich aber auch so genau, als man diess für die praktische Genauigkeit nur verlangen könnte.

Die meisten von ihnen sind aus den mehreren hundert neuen, vom Verfasser auf rationellem Wege aufgefundenen, sehr interessanten Bi- und Trisections-Kurven, woraus ferner auch einige fürs constructive Zeichnen so wünschenswerthe Methoden für die Multisection eines beliebigen Winkels abgeleitet worden sind.

Bisection.

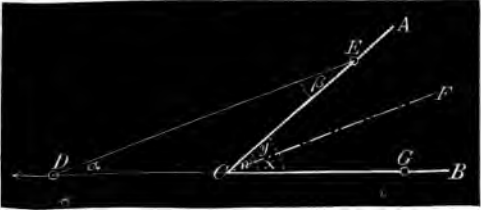
Bevor wir die Trisection zeigen, wollen wir zuerst Einiges über die Zweitheilung (Bisection) eines beliebigen Winkels angeben, und zwar aus folgenden Gründen: Erstens weil es so die Ordnung erfordert, dann aber auch desshalb, weil einige von den Trisections-Methoden auf die der Bisection gegründet sind.

Bekanntlich kann man jeden beliebigen Winkel streng geometrisch auf mehrerlei Art in 2 gleiche Theile theilen; allein diese Methoden, die bisher bekannt sind, lassen sich nicht in allen Fällen, d. h. nicht bei jedem beliebigen Winkel mit gleichem Vortheile anwenden; insbesondere kann man sie dann nicht vortheilhaft anwenden, wenn der Winkel zu klein oder zu gross ist.

Der Verfasser war daher bemüht, zuerst eine einfache und für alle Fälle anwendbare Bisections-Methode aufzufinden.

I. Art der Zweitheilung (Bisection).

Fig. 8.



Construction. Es sei ACB (Fig. 8) der gegebene Winkel, welcher in 2 gleiche Theile getheilt werden soll. Man mache $CD = CE$, verbinde den so erhaltenen Punkt D mit E durch eine Gerade, ziehe durch den Punkt C die $CF \parallel DE$, so ist CF die Halbirungslinie des gegebenen Winkels ACB.

Beweis. Da $CE = CD$ gemacht wurde,

so ist $\measuredangle\, \alpha = \beta$;

da ferner $DE \parallel CF$ ist, so
hat man $x = \alpha$
und $y = \beta$

daher $x = y$, weil $\alpha = \beta$ ist.
Es ist aber $x + y = w$,
und da $x = y$ ist,
so folgt auch $2x = 2y = w$,
folglich ist $x = y = \frac{w}{2}$ w. z. b. w.

Man hat demnach folgenden Lehrsatz über die Bisection:

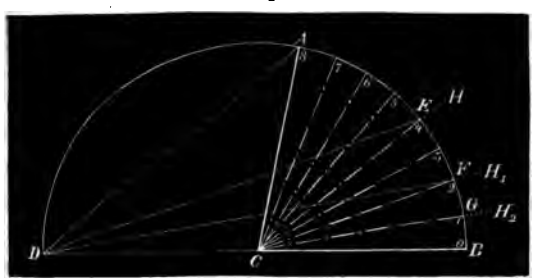
Verlängert man den einen Schenkel des gegebenen Winkels über die Spitze hinaus und schneidet auf dieser Verlängerung, so wie auf dem zweiten Schenkel vom Scheitelpunkte aus gleiche Stücke ab, legt dann durch die so erfolgten 2 Punkte eine Gerade und führt zu dieser aus dem Scheitelpunkte eine Parallele, so wird durch diese der gegebene Winkel halbirt.

Wie man aus der Construction sieht, ist diese Art, einen Winkel zu halbiren, höchst einfach, und für den praktischen Gebrauch selbst dann anwendbar, wenn der gegebene Winkel sehr klein oder auch sehr gross ist, also für jeden beliebigen Winkel. Denn es lässt sich jedenfalls der Ergänzungswinkel zu $2R$ sehr leicht hinzuzeichnen; und ist der Winkel auch sehr nahe an $2R$ oder an 3 oder $4R$, so ist das Verfahren noch immer dasselbe, und mit derselben Richtigkeit der Zeichnung.

Denkt man sich z. B. in der obigen Figur die CF über den Scheitelpunkt C hinaus verlängert, so wird dadurch der Ergänzungswinkel des Winkels ACB zu $4R$ ebenfalls halbirt, ohne dass man dabei um irgend einen Strich mehr macht; und da das Abschneiden der Schenkel, so wie das Ziehen der Parallelen praktisch leicht auszuführen ist, so ist diess auch gewiss eine höchst einfache Methode.

Insbesondere aber ist sie für den praktischen Zeichner desshalb empfehlbar, weil man darnach jeden beliebigen Winkel in eine beliebige Potenz von zwei mit grossem Vortheile, und zwar mittelst zweier Zeichendreiecke ausführen kann, ohne dass man sich hierbei eines Zirkels zum Beschreiben der Bögen, wie bei der gewöhnlichen Bisections-Methode bedient.

Fig. 9.



Soll z. B. der Winkel ACB (Fig. 9) in $2^3 = 8$ gleiche Theile getheilt werden, so verlängere man wie zuvor den einen Schenkel hier BC über den Scheitelpunkt C hinaus, beschreibe aus C mit einem beliebigen Radius den Bogen AB und mache $CD = AC = BC$. Wird nun A mit D durch eine Gerade verbunden, und aus C zu AD eine Parallele gezogen, so wird nach dem Obigen $AE = BE$, somit auch, wenn CE gezogen wird, $\measuredangle\ ACE = BCE$ erfolgen. Verbindet man ferner D mit E durch eine Gerade und führt zu dieser aus C ebenfalls eine Parallele, so wird wie zuvor auch $EF = BF$, somit auch, wenn CF gezogen wird, $\measuredangle\ ECF = BCF$ sein; und da $BE = \frac{1}{2} AB$ ist, so muss auch $AE = BE = \frac{1}{2} AB$, daher auch $BF = \frac{1}{2} BE = \frac{1}{4} AB$. Wird endlich auch der Punkt F mit D durch eine Gerade verbunden, und zu dieser aus dem Scheitelpunkte C eine Parallele gezogen, so wird der Bogen BF bei G halbirt.

Es ist somit der Bogen

$$BG = \frac{1}{2} BF = \frac{1}{4} BE = \frac{1}{8} AB.$$

Aus dieser Construction ist also klar, dass dadurch sehr viele Linien erspart, also nicht gezogen zu werden brauchen; allein man könnte auch diese hier gezogenen weglassen, indem man nur die Einschnitte an betreffenden Stellen macht.

So wie man hier den Winkel ACB in $2^3 = 8$ gleiche Theile getheilt hat, ebenso kann man auch jeden beliebigen Winkel

in 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256.....

oder in $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, \ldots,$

also überhaupt in die 2^n, d. h. in eine jede beliebige Potenz von zwei gleicher Theile theilen und zwar stets nur mittelst der Parallelen.

Werden also nur die Theile des gegebenen Winkels berücksichtigt, so erhält man folgende Reihe:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \ldots\ldots$$

oder

$$\frac{1}{2^1}\ \frac{1}{2^2}\ \frac{1}{2^3}\ \frac{1}{2^4}\ \frac{1}{2^5}\ \frac{1}{2^6}\ \frac{1}{2^7} \ldots \frac{1}{2^{n-2}}, \frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^n}.$$



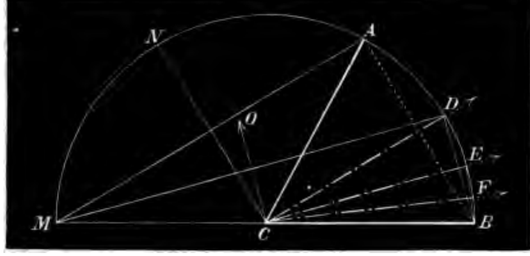
Wie man nun das so eben gezeigte Verfahren von der Bisection bei der Trisection benützen kann, das werden wir später zeigen.

II. Art der Zweitheilung (Bisection).

Ein anderes, mit dem ersteren innig zusammenhängendes Verfahren der Bisection ist das mittelst zweier Dreiecke, wornach man den gegebenen Winkel auch in eine beliebige Potenz von zwei gleicher Theile theilt, ist folgendes:

Fig. 10.





Es sei ACB (Fig. 10) der zu theilende Winkel und AB der ihm entsprechende Bogen. Man ziehe die Sehne AB, und aus dem Scheitelpunkte C die $CD \perp AB$, so wird dadurch, wie bekannt, der gegebene Winkel ACB halbirt. Ebenso wird die Hälfte BCD des gegebenen Winkels halbirt, indem man BD zieht, und auf diese aus dem Scheitelpunkte C eine Normale führt; und wird dies so fortgesetzt, so kann man wie zuvor den gegebenen Winkel in eine beliebige Potenz von zwei gleicher Theile theilen.

An und für sich ist dies Verfahren nichts neues; doch wird es mit besonderem Vortheile zur grösseren Richtigkeit des ersten Verfahrens benützt; denn, wie bekannt, ist durch zwei Punkte eine Gerade gegeben, allein dies ist nur mathematisch denkbar; denn beim praktischen Zeichnen ist es nur Zufall, wenn die Kante des Lineals an zwei Punkte angelegt, die gezogene Gerade auch wirklich so gibt, wie man sie sich durch die zwei Punkte mathematisch denken kann.

Wird also die erste Methode der Bisection angewendet, so muss sie durch die zweite unterstützt werden. Soll nämlich der Winkel ACB der obigen Figur halbirt werden, so muss nach dem Obigen die Kante des einen Dreieckes an die Punkte A und M angelegt werden; alsdann muss aber dieses Dreieck mittelst eines zweiten Dreieckes so geschoben werden, dass die zweite Kathete desselben Dreieckes auf A und B fällt. Stimmen nun auch diese zwei

Punkte mit der Kante zusammen, so kann dann ohne weiters das Dreieck so weit geschoben werden, dass die Kante desselben auf den Punkt *C* zu liegen kommt, wo dann die Halbirungslinie gezogen werden kann.

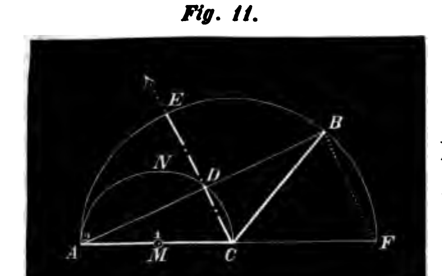
Man braucht aber dabei weder die eine noch die andere Hilfslinie, d. i. weder *AB* noch *AM* zu ziehen, sondern nur den Schenkel *BC* zu verlängern, und die drei Punkte *A*, *B*, *M* in gleicher Entfernung von dem Scheitelpunkte zu bestimmen.

In diesem Falle ist auch der Bogen des Winkels überflüssig.

III. Art der Zweitheilung (Bisection).

Ein viel interessanteres Verfahren der Zweitheilung ist das nachfolgende:

Fig. 11.



Construction. Es sei *ACB* (Fig. 11) der gegebene Winkel, welcher in zwei gleiche Theile getheilt werden soll. Man theile den Schenkel *AC* in zwei gleiche Theile, beschreibe aus dem Halbirungspunkte *M* mit $CM = \frac{1}{2} AC$ einen Halbkreis *ANC*, verbinde die Punkte *A* und *B* durch eine Gerade, und führe aus dem Scheitelpunkte *C* durch den so erfolgten Punkt *D* ebenfalls eine Gerade, welche den Winkel *ACB*, so wie den ihm entsprechenden Bogen *AB* bei *E* halbirt.

Beweis. Man verlängere den Halbmesser *AC* über *C* hinaus und ergänze den Bogen *AEB* zu einem Halbkreise, so hat man, da die Winkel *ADC* und *ABF* Winkel im Halbkreise sind,

$\sphericalangle\ ADC = ABF = R$, und da

$\sphericalangle\ DAC = BAF$ ist; so sind die beiden Dreiecke *ADC* und *ABF* einander ähnlich; daher:

$$AC : AF = AD : AB;$$

es ist aber $AC : AF = 1 : 2$,

daher auch $AD : AB = 1 : 2$,

woraus $AB = 2\,AD$

oder $AD = \frac{1}{2} AB$ folgt;

somit ist auch $BD = \frac{1}{2} AB$,

folglich ist auch

$$\sphericalangle\ ACE = BCE = \tfrac{1}{2} ACB$$ w. z. b. w.

Man hat demnach für die Bisection folgenden Satz:

Jeder über dem einen Schenkel des gegebenen Winkels durch dessen Scheitelpunkt beschriebene Halbkreis ist der Bisections-Halbkreis eines beliebigen Winkels von 0—180°.

Wendet man diese Construction auf den ganzen Kreis an, also auf den vollen Winkel, so wird der Satz so heissen:

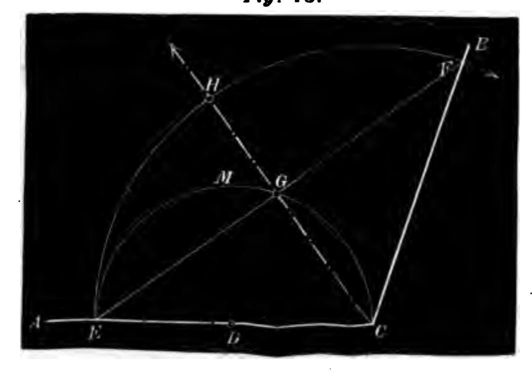
Jeder über dem Halbmesser eines gegebenen Kreises beschriebene Kreis ist der Bisections-Kreis des gegebenen. — Oder: Berühren sich zwei Kreise innerhalb und ist der kleinere über dem Halbmesser des grösseren beschrieben, so ist der kleinere der Bisections-Kreis des grösseren.

Mittelst des obigen Satzes kann man jeden beliebigen Winkel von 0 — 180° sehr leicht und schnell halbiren. Wir wollen diess durch zwei Beispiele erläutern.

Fig. 12.

Es sei **ACB** (Fig. 12) der zu theilende Winkel. Man nehme auf dem Schenkel **A C** einen beliebigen Punkt **D** an, beschreibe aus demselben mit dem Halbmesser **CD** den Halbkreis **CME**, ferner aus dem Scheitelpunkte **C** mit dem Halbmesser **CE** den Bogen **EF**. Wird nun die Sehne **E F** gezogen und durch den so erfolgten Punkt **G** aus dem Scheitelpunkte **C** eine Gerade geführt, so halbirt diese den Winkel und den ihm entsprechenden Bogen.

Fig. 13.



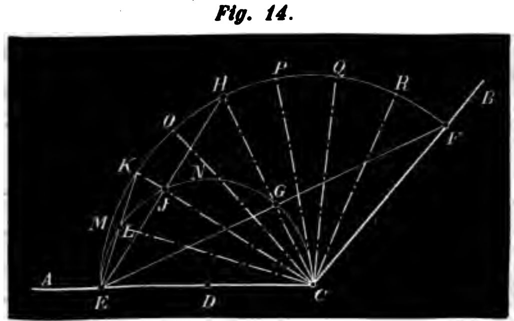
Es sei **ABC** (Fig. 13) ein anderer Winkel, welcher in zwei

gleiche Theile getheilt werden soll. Nimmt man auf dem Schenkel ***AC*** den Punkt ***D*** beliebig an, und beschreibt mit ***CD*** einen Halbkreis; dann aus ***C*** mit ***CE*** einen Kreisbogen ***EHF***, verbindet die Punkte ***E*** und ***F*** mit einander durch eine Gerade, so ist auch hier der Punkt ***G*** der Halbirungspunkt und die durch diesen Punkt aus ***C*** geführte Gerade die Halbirungslinie.

Vergleicht man nun die beiden Fälle mit einander, so sieht man, dass die ganze Construction innerhalb der beiden Schenkel und des ihm entsprechenden Bogens vorgenommen wird. Es eignet sich daher diese Construction insbesondere dann für die Halbirung eines Winkels, wenn ausserhalb desselben kein Raum vorhanden ist, nach der uralten Methode die Halbirung auszuführen. Doch ist dieses Verfahren bei sehr kleinen Winkeln zu wenig scharf und deutlich, weil die Sehne des betreffenden Winkels den Hilfs-Halbkreis schief schneidet, so dass man bei sehr kleinen Winkeln den Durchschnittspunkt kaum ausmitteln kann. Dessen ungeachtet ist diese Methode eine vorzügliche zu nennen, weil man vermittelst derselben in allen übrigen Fällen die Halbirung sehr vortheilhaft vornehmen kann.

Ist ein gegebener Winkel in eine beliebige Potenz von zwei, gleicher Theile, zu theilen, so ist diese Methode ebenso wie die erstere sehr vortheilhaft.

Fig. 14.



Es sei ***ACB*** (Fig. 14) der gegebene Winkel, welcher in $2^3 = 8$ gleiche Theile getheilt werden soll. Man nehme auf dem einen Schenkel, hier auf ***AC*** einen beliebigen Punkt ***D*** an, beschreibe mit dem Halbmesser ***CD*** aus ***D*** einen Halbkreis, so ist dieser der Theilungs-Halbkreis. Wird nun aus ***C*** mit ***CE*** der Bogen ***EF*** gezeichnet, alsdann der Punkt ***E*** mit ***F*** verbunden und aus ***C*** durch den so erfolgten Punkt ***G*** eine Gerade gezogen, so ist arc. $EH = FH = \frac{1}{2} EF$. Wird ferner ***E*** mit ***H*** durch Gerade verbunden, und aus ***C*** durch den so erhaltenen Punkt ***J*** eine Gerade gezogen, so ist arc. $EK = HK = \frac{1}{2} EH = \frac{1}{2} FH = \frac{1}{4} EF$. Wird endlich ***E***

mit K verbunden und aus dem Punkte C durch den so erfolgten Punkt L eine Gerade geführt, so hat man:

$$\text{arc. } EM = KM = \tfrac{1}{2} EK = \tfrac{1}{3} HK = \tfrac{1}{4} EH = \tfrac{1}{4} FH = \tfrac{1}{8} EF.$$

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Construction erhellet aus dem vorhergehenden Satze.

Wird nun der letzte Theil EM auf dem Bogen EF aufgetragen, so muss er auf EF achtmal enthalten sein; somit müssen auch die dadurch erhaltenen Winkel einander gleich sein, also

$$\measuredangle\; ECM = KCM = \ldots\ldots = \tfrac{1}{8} ACB \text{ sein.}$$

Da man nun nach diesem Verfahren jeden beliebigen Winkel in eine beliebige Potenz von zwei gleicher Theile theilen kann, so kann man auch die Winkel für die Trisectionsreihe finden, somit auch die Trisection vornehmen, wie dies hier später gezeigt wird.

IV. Art der Zweitheilung (Bisection).

Zweitheilung (Bisection) des Winkels mittelst der Sehne und der auf den einen Schenkel gefällten Lothrechten.

Fig. 15.

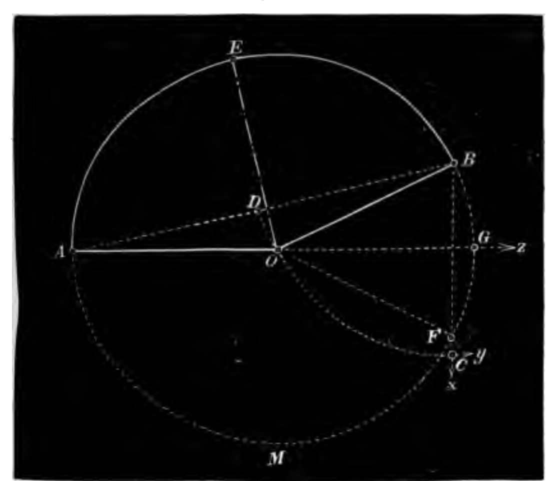


Es sei AOB (Fig. 15) der zu theilende Winkel und AB der ihm entsprechende Bogen. Man ziehe die Sehne AB, dann aus B auf dem Schenkel AO eine Lothrechte Bx, welche den Schenkel AO in C schneidet, so ist der von der Sehne und der Lothrechten Bx gebildete Winkel $ABC = \frac{1}{2} w$, so dass, wenn aus B mit BO zwischen der Sehne und der Lothrechten ein Bogen DE beschrieben wird, dieser sich auf AB zweimal auftragen lässt.

Beweis. Verlängert man die Lothrechte BD über D hinab, zieht den Bogen AB so weit, bis die Verlängerung der Lothrechten bei G geschnitten wird, und zieht überdies auch noch die GO, so ist $\measuredangle\; ABG = \frac{1}{2} AOG$, weil der $\measuredangle\; AOG$ der Centriwinkel und ABG der Peripheriewinkel ist, welche auf demselben Bogen AG aufstehen. Es ist aber arc. $AG = AB$, weil $BG \perp AO$ gemacht wurde; mithin ist, weil $\measuredangle\; ABG = \frac{1}{2}$ AOG, auch $\measuredangle ABG$ oder $ABD = \frac{1}{2} AOB$ w. z. b. w.

Um nun den halben Bogen von AB zu erhalten, braucht man nur aus dem Punkte B mit dem Halbmesser $= AO$ zwischen der Sehne AB und der Lothrechten Bx einen Bogen zu beschreiben, hier den Bogen DE und diesen dann auf dem Bogen AB zweimal aufzutragen, wodurch der Halbirungspunkt F erfolgt.

Fig. 16.



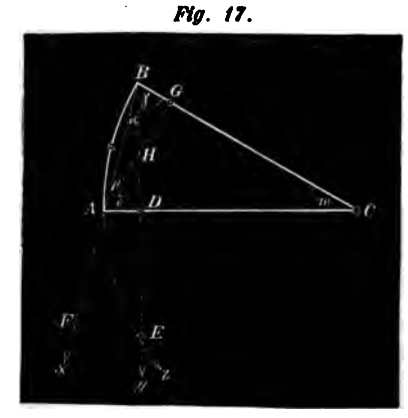
Ist der zu halbirende Winkel ein stumpfer, so muss einer der beiden Schenkel über den Scheitelpunkt hinaus verlängert und auf die Verlängerung eine Lothrechte gezogen werden. Ist z. B. der Winkel AOB (Fig. 16) zu halbiren, so ziehe man die Sehne AB, verlängere den Schenkel AO über den Scheitelpunkt O hinaus, führe aus B auf diese Verlängerung die Lothrechte Bx und beschreibe aus B mit BO zwischen der Sehne AB und der Lothrechten Bx einen Bogen CD, welcher sich auf dem gegebenen Bogen AEB zweimal auftragen lässt.

Beweis. Wird die Lothrechte Bx aus O mit BO in F geschnitten, und der so erfolgte Punkt F mit O durch eine Gerade verbunden, so ist AOF der Centriwinkel und ABF der Peripheriewinkel, welche auf demselben Bogen AMF aufstehen. Nun ist aber der Bogen $AMF = AEB$, weil $BG = FG$ ist, daher folgt auch $\measuredangle$ $DBF = \frac{1}{2} AOB$ w. z. b. w.

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich nun ausser der Zweitheilung des Winkels folgender Lehrsatz:

Wird in einem gleichschenkeligen Dreiecke aus dem einen Endpunkte der Basis auf den ihm gegenüberliegenden Schenkel eine Lothrechte gezogen, so ist der von der Basis und der Lothrechten gebildete Winkel = der Hälfte des der Basis gegenüberliegenden Winkels.

Fig. 17.



Ist also z. B. ACB (Fig. 17) ein gleichschenkeliges Dreieck, in welchem $AC = BC$ ist, und fällt man aus B auf AC ein Loth By, so ist

$$\sphericalangle ABD = \tfrac{1}{2} ACB.$$

Der Beweis wird, wie bei der Zweitheilung des Winkels, dadurch geführt, indem man AB über A und BD über D hinaus verlängert, u. s. w. wie zuvor.

Fällt man auf beide Schenkel die Lothrechten, so ist der durch diese Lothrechten innerhalb des Dreieckes gebildete Winkel hier $\sphericalangle AHB =$ der Summe der beiden an der Basis liegenden Winkel, also hier

$$\sphericalangle AHB = \sphericalangle ABC + BAC = 2\,ABC = 2\,BAC;$$

denn es ist, wie die Figur zeigt:

$\alpha + \beta + \delta = R$, weil $ADB = R$ ist nach der Construction

und $\alpha + \beta + AHB = 2R$, als die 3 Winkel des 3eckes AHB.

Multiplicirt man die erste Gleichung mit 2, so hat man

$$2\alpha + 2\beta + 2\delta = 2R;$$

daher beide verglichen folgt

$$2\alpha + 2\beta + 2\delta = \alpha + \beta + AHB.$$

Es ist aber $\alpha = \beta$,

folglich

$4\beta + 2\delta = 2\beta + AHB$, welches abgekürzt

gibt $2\beta + 2\delta = AHB$,

oder $2(\beta + \delta) = AHB$;

und da $\beta + \delta = BAD$ ist,

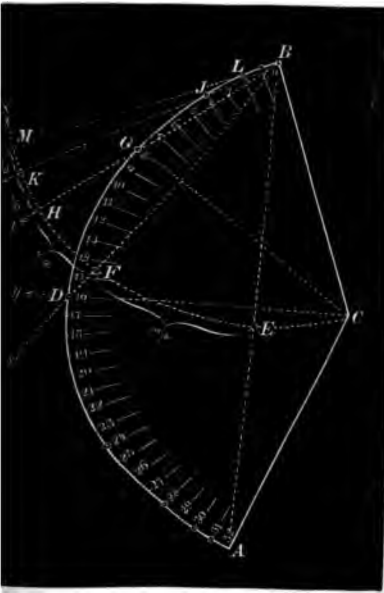
so folgt $2\,BAD = AHB$

oder

$ABC + BAC = AHB$, w. z. b. w.

Mittelst des obigen Satzes und der daraus folgenden Construction kann man jeden beliebigen Winkel nicht nur in zwei, sondern auch in vier und auch in jede beliebige Potenz von zwei gleicher Theile theilen, indem man mit jeder erhaltenen Hälfte so verfährt, wie mit dem ganzen Winkel.

Fig 18.



Ist z. B. der Winkel ACB (Fig. 18) in eine beliebige Potenz von zwei gleicher Theile zu theilen, so hat man, wenn, wie zuvor die Sehne, dann die BD gezogen, und über dies auch der Bogen BM aus B mit BC beschrieben wird; arc. $EF = \frac{1}{4}$ arc. AB. Wird ferner $BG = EF$ gemacht und aus B durch G die Bt gezogen, so erfolgt $FH = \frac{1}{2} BG = \frac{1}{8} AB$. Macht man $BJ = FH$ und zieht aus B durch J die Bu, so erhält man $HK = \frac{1}{2} BJ = \frac{1}{4} BG = \frac{1}{8} BD = \frac{1}{16} AB$. Wird dann $BL = HK$ gemacht, und aus B durch L die Bv gezogen, so erhält $KM = \frac{1}{2} BL = \frac{1}{4} BJ = \frac{1}{8} BG = \frac{1}{16} BD = \frac{1}{32} AB$, u. s. w.

Fig 19.

Man könnte also auf diese Art jede beliebige Potenz von 2 construiren, wenn es möglich wäre, durch zwei Punkte, die nahe an einander sind, eine Gerade mathematisch genau zu legen. Da dies jedoch nicht der Fall ist, so kann auch diese Construction nur bis auf eine gewisse Grenze getrieben werden, so wie hier, wo noch $3^2 = \frac{1}{32}$ ziemlich genau gefunden wird. Doch ist dies auf eine andere Art bedeutend weiter mit einer grossen Genauigkeit möglich, und zwar dadurch, indem man die durch diese Construction erhaltenen Theile nicht aus dem Punkte, aus welchem der Bisectionsbogen beschrieben wurde, sondern von dem zweiten Endpunkte des gegebenen Bogens aufträgt.

Ist z. B. der Winkel ACB (Fig. 19) zu theilen, so hat man,

wenn AB gezogen, dann aus C die $CD \perp AB$ geführt und aus B mit BC der Bogen beschrieben wird, arc. $EF = \frac{1}{4}$ arc. AB; macht man nun $AG = EF$ und verbindet G mit B, so ist

$$EH = \tfrac{1}{2} AG = \tfrac{1}{4} AD = \tfrac{1}{8} AB;$$

macht man $AJ = EH$, und verbindet J mit B, so erfolgt

$$EK = \tfrac{1}{2} AJ = \tfrac{1}{4} AG = \tfrac{1}{8} AD = \tfrac{1}{16} AB;$$

macht man $AL = EK$ und verbindet L mit B, so folgt

$$ME = \tfrac{1}{2} AL = \tfrac{1}{4} AJ = \tfrac{1}{8} AG = \tfrac{1}{16} AD = \tfrac{1}{32} AB;$$

macht man $AN = EM$ und verbindet N mit B, so folgt

$$EO = \tfrac{1}{2} AN = \tfrac{1}{4} AL = \tfrac{1}{8} AJ = \tfrac{1}{16} AG = \tfrac{1}{32} AD = \tfrac{1}{64} AB;$$

macht man $AP = EO$ und verbindet P mit B, so hat man

$$EQ = \tfrac{1}{2} AP = \tfrac{1}{4} AN = \tfrac{1}{8} AL = \tfrac{1}{16} AJ = \tfrac{1}{32} AG = \tfrac{1}{64} AD = \tfrac{1}{128} AB.$$

Trägt man EQ auf AB von A aus, und verbindet R mit B, so erfolgt

$$ES = \tfrac{1}{2} AR = \tfrac{1}{4} AP = \tfrac{1}{8} AN = \tfrac{1}{16} AL = \tfrac{1}{32} AJ = \tfrac{1}{64} AG = \tfrac{1}{128} AD = \tfrac{1}{256} AB.$$

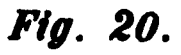
Wie man aus der Figur sieht, ist nach dieser Construction noch $\frac{1}{256}$ sichtbar; ja es könnte noch $\frac{1}{512}$ und nöthiger Weise auch noch $\frac{1}{1024}$ gefunden werden. Der letzte Theil ist für das gewählte Beispiel gleich der Dicke eines feinen Striches.

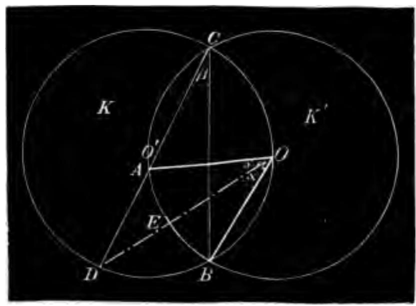
Es ist daher diese Construction sehr praktisch und für die Dreitheilung eines Winkels sehr anwendbar, weil man darnach sehr leicht und schnell zum erwünschten Resultate gelangen kann.

V. Art der Zweitheilung (Bisection).

Andere Lehrsätze über die Bisection des Winkels durch zwei sich schneidende Kreise.

1. Lehrsatz. Wenn zwei Kreise sich so schneiden, dass der eine durch den Mittelpunkt des andern geht, so ist der eine Kreis Bisectionskreis des andern.


Fig. 20.



Hier werden wir vor allem zwei Fälle unterscheiden, denn die zwei sich schneidenden Kreise sind gleich oder ungleich gross.

I. Es seien zwei sich schneidende Kreise K und K^1 (Fig. 20

gleich gross. Um nachzuweisen, dass der eine Kreis ein Bisectionskreis des andern ist, nehmen wir an, dass der beliebige Winkel AOB in zwei gleiche Theile zu theilen ist. Wird zu diesem Behufe aus dem Punkte C durch A eine Gerade geführt, bis die Peripherie des Kreises K bei D geschnitten ist, und der so erfolgte Punkt D mit O durch eine Gerade verbunden, so schneidet diese die AB bei E so, dass $AE = BE$ und der Winkel $AOE = \sphericalangle BOE$ ist.

Beweis. Es ist, wie die Figur zeigt,

$\sphericalangle AOB = 2\,ACB$, weil AOB der Centri- und ACB der Peripheriewinkel ist; da ferner

arc BD gemeinschaftlich für den Winkel BCD und BOD ist, so

folgt $\sphericalangle BOD = BCD$;

es ist aber $\sphericalangle BCD = BCA = \frac{1}{2} AOB$,

folglich ist $\sphericalangle BOD = \frac{1}{2} AOB$

oder $\sphericalangle AOB = 2\,BOD$, w. z. b. w.

Da ferner $\sphericalangle AOB = AOE + BOE$ ist,

und $\sphericalangle AOB = \frac{1}{2} AOB + AOE$ ist,

so folgt $\sphericalangle AOB - \frac{1}{2} AOB = AOE$,

woraus $\sphericalangle \frac{1}{2} AOB = AOE$ w. z. b. w.,

folglich ist der Winkel AOB durch DO halbirt.

Nehmen wir jetzt einen grösseren Winkel an, nämlich den Winkel AOB (Fig. 21), der etwa über 90° ist, so hat man hier dieselbe Construction und denselben Beweis. Man muss nämlich aus C durch A eine Gerade bis zu der Peripherie des einen Kreises ziehen und den so erfolgten Punkt D mit dem Mittelpunkte des zweiten verbinden,

Fig. 21.

wo dann $\sphericalangle \frac{1}{2} AOB$ oder $\frac{\alpha}{2} = BCD = \beta$

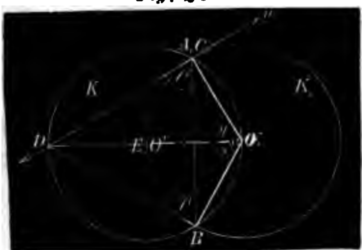
und $\sphericalangle x = \beta$,

also $\alpha = 2x = 2\beta$,

daher $x = \frac{\alpha}{2} = \beta$,

somit auch $y = \frac{\alpha}{2} = x = \beta$, folgt.

Fig. 22 a.



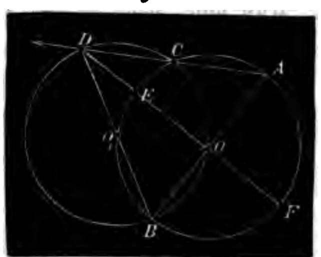
Denkt man sich den einen Schenkel *AO* der Fig. 21 so weit vorgerückt, dass der Punkt *A* mit dem Durchschnittspunkte beider Kreise zusammenfällt, wie in Fig. 22 *a*, so hat man dann im Punkte *C* eine Tangente zu ziehen, um den Durchschnittspunkt *D* zu erhalten. In diesem Falle hat man $x = y = \beta = \beta' = \frac{1}{2}\alpha$.

Fig. 22 b.



Aus der nähern Betrachtung der letzteren Constructionen ergeben sich leicht jene für ein 12-, 24-, 48-, 96-, 192-Eck u. s. w. — Hat man z. B. in dem Kreise *K* (Fig. 22 b) die Centrale *cO* gezogen, dann aus *b* durch *c* eine Gerade bis *e* geführt, und *e* mit *O* verbunden, so ist $af = cf = \frac{1}{12}$ der Peripherie; wird ferner aus *b* durch eine Gerade bis *g* gezogen und *g* mit *O* verbunden, so folgt $ah = hf = \frac{1}{24}$ der Peripherie. Wird nun so fortgefahren, so hat man $ak = kh = \frac{1}{48}$, $am = mk = \frac{1}{96}$, $ao = om = \frac{1}{192}$ der Peripherie u. s. w., sehr einfach und mathematisch richtig.

Fig. 23.



Ist der Winkel $\alpha = 180°$ (Fig. 23), so bilden die Punkte *D*, *A* und *B* gehörig mit einander verbunden, ein gleichseitiges Dreieck, woraus sich manche interessante Constructionen ergeben. Ist der Winkel $\alpha = 3R$, so ist die Construction dieselbe, mit dem Bemerken, dass, wie schon die Figur zeigt, die Durchschnittspunkte sehr undeutlich ausfallen. Es ist übrigens überflüssig, andere Beispiele anzuführen, da der Beweis des ersten ohnehin allgemein ist.

II. Nehmen wir jetzt den Fall an, die zwei sich schneidenden Kreise sind verschieden gross. Es soll nämlich der zu theilende Kreis kleiner sein als der Theilende. Der erste sei *K* und der

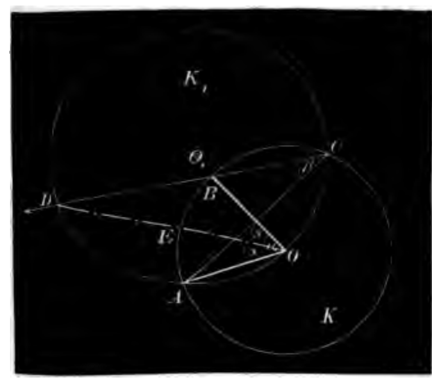


Fig. 24.

zweite K_1 (Fig. 24); der eine sei aus dem Mittelpunkte O, der andere hingegen aus O^1 beschrieben.

Ist nun AOB der zu theilende Winkel, so führe man aus C durch B eine Gerade bis zu der Peripherie des 2. Kreises und verbinde den so erfolgten Punkt D mit O durch eine Gerade, wodurch

$$\text{arc } AE = BE = \frac{AB}{2}, \text{ und ebenso}$$

$$\measuredangle\, AOE = BOE = \frac{AOB}{2} \text{ erfolgt.}$$

Beweis. Es sei der Kürze und leichteren Übersicht wegen

$\measuredangle\, AOB = \alpha$, | $AOE = x$,

$\measuredangle\, ACD = \beta$ | $BOE = y$ gesetzt.

Da $\measuredangle\, AOB = \alpha$ ein Centriwinkel und $\measuredangle\, ACB = \beta$ ein Peripheriewinkel ist, so hat man

$$\alpha = 2\beta;$$

es ist aber $x = \beta$, weil sie in demselben Kreise, auf demselben Bogen aufstehen; daher ist

$\alpha = 2x$, folglich

$x = \frac{\alpha}{2}$, somit auch

$y = \frac{\alpha}{2}$ w. z. b. w.

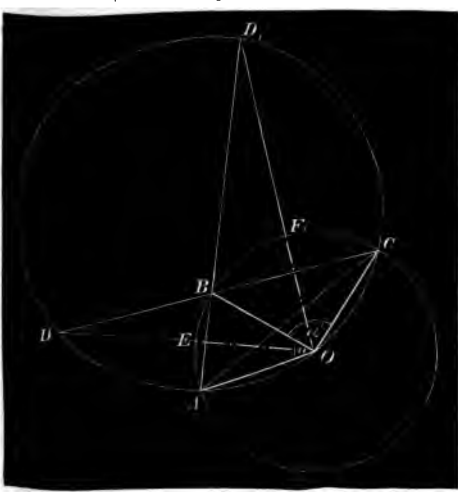


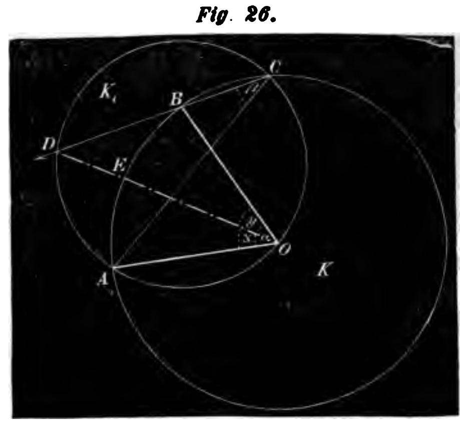
Fig. 25.

Betrachten wir die zwei Winkel AOB und BOC (Fig. 25), so findet man, dass der eine dadurch halbirt wird, indem man aus C durch B eine Gerade führt, und der andere, indem man aus A ebenfalls durch B eine Gerade bis zu der Peripherie desselben Kreises führt.

Hieraus folgt eine einfache Viertheilung eines beliebigen Winkels, welches hier dann erfolgt, sobald man in dem $\measuredangle$ AOC auf AC aus O eine Lothrechte zieht, aus einem Punkte derselben durch A, O und C einen Kreis beschreibt u. s. w.

III. Nehmen wir jetzt den Fall an, der zu theilende Kreis sei grösser als der theilende. Es sei also K (Fig. 26) der zu theilende und K^1 der theilende; es sei ferner AOB der zu theilende Winkel. Wird aus dem Punkte C durch B eine Gerade geführt, bis die Peripherie geschnitten ist, und der so erfolgte Punkt D mit O durch eine Gerade verbunden,

Fig. 26.



so hat man arc $AE = BE = \frac{AB}{2}$

und $\measuredangle$ $AOE = BOE = \frac{AOB}{2}$.

Beweis. Es ist $\alpha = 2\beta$, weil α der Centri- und β der Peripheriewinkel ist;

es ist aber $\measuredangle$ $x = \beta$, weil jeder von ihnen auf demselben Bogen aufsteht,

somit ist $\alpha = 2\beta = 2x$,

daher ist $x = \frac{\alpha}{2}$,

somit auch $y = \frac{\alpha}{2}$ w. z. b. w.

Auch hier wird der zweite Winkel, nämlich derjenige, welcher durch die hier gedachte Gerade CO und durch BO entsteht, dadurch halbirt, indem man aus A durch B eine Gerade führt u. s. w.

Aus dem Obigen folgt also, dass der Mittelpunkt des theilenden Kreises in der Peripherie, oder innerhalb oder auch ausserhalb des zu theilenden Kreises angenommen werden kann; nur muss jedesmal die Peripherie des theilenden Kreises durch den zu theilenden gehen.

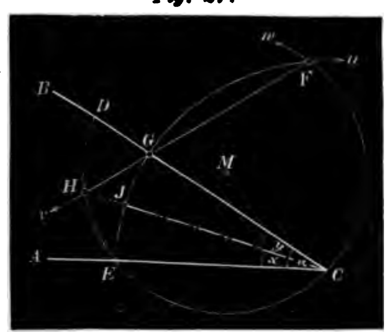
Man hat daher folgenden allgemeinen Satz:

W e n n s i c h z w e i K r e i s e v o n g l e i c h e r o d e r v o n v e r s c h i e d e n e r G r ö s s e s o s c h n e i d e n, d a s s d e r e i n e d u r c h

den Mittelpunkt des andern geht, so ist der eine Kreis der Bisectionskreis des andern.

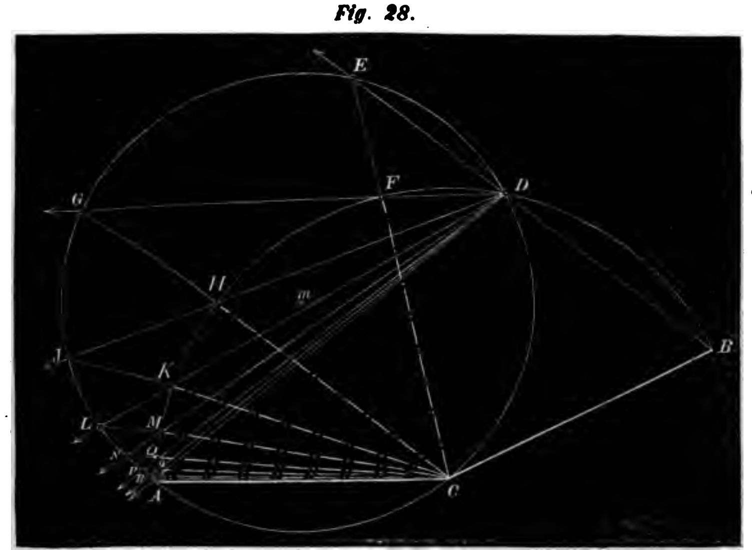
Mittelst diesen Satzes kann man also jeden beliebigen Winkel auf eine noch einfachere Weise halbiren. Ist z. B. ACB (Fig. 27) der zu halbirende Winkel, so nehme man den Punkt M beliebig an, beschreibe aus diesem durch den Scheitelpunkt C den Bogen $DECw$, welcher den Schenkel AC des gegebenen Winkels bei E schneidet, beschreibe dann aus C mit CE durch E einen Bogen so, dass der Bogen $DECw$ in F, also auch der zweite Schenkel BC in G geschnitten ist; führe aus F durch G eine Gerade Fv und verbinde H mit C, so ist arc EJ = arc GJ und der Winkel $ECJ = \sphericalangle GCJ$, oder $\sphericalangle x = y = \frac{\alpha}{2}$.

Fig. 27.



Man kann ferner mittelst dieses Satzes jeden beliebigen Winkel in eine beliebige Potenz von zwei, gleicher Theile, theilen.

Fig. 28.



Es sei nun ACB (Fig. 28) der zu theilende Winkel, und $ACDE$ der aus m beschriebene Bisectionskreis; so ist, wenn aus

B durch D eine Gerade gezogen, und E mit C verbunden wird, arc $AF = BF = \frac{AB}{2}$; wird ferner aus D durch F eine Gerade bis G geführt und G mit C verbunden, so ist arc $AH = FH = \frac{AF}{2} = \frac{AB}{4}$; wird alsdann aus D durch H eine Gerade bis J gezogen, und J mit C verbunden, so ist arc. $AK = HK = \frac{AH}{2} = \frac{AF}{4} = \frac{AB}{8}$ u. s. w.

Man kann daher diese Theilung so weit treiben, als das menschliche Auge reicht, allein im Gedanken kann diese Theilung ins Unendliche fortgesetzt werden, wodurch die Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \ldots \frac{1}{2^n} + \ldots$$

oder

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{128} + \tfrac{1}{256} + \ldots$$

geometrisch construirt wird.

Wie wir später sehen werden, wird mittelst dieser Bisections-Methode die Trisection sehr praktisch und genau ausgeführt.

6. Art der Zweitheilung (Bisection).

Bei dieser Art von Bisection ist die Bisectionslinie eine Gerade, welche die Eigenschaft hat, dass man vermittelst derselben jeden beliebigen Winkel in zwei gleiche Theile theilt.

Die Bisectionslinie wird auf folgende Art gefunden.

Fig. 29.



Es sei $ABDCE$ (Fig. 29) ein beliebiger Kreis. Wird dieser aus dem Punkte C mit CO bei D und E geschnitten und durch diese Punkte eine Gerade uv gelegt, so ist diese die Bisectionslinie.

Wird nun in diesem Kreise ein beliebiger Winkel z.B. AOB angenommen, dann B mit C durch eine Gerade verbunden, und aus O durch den Durchschnittspunkt G eine Gerade gezogen, so ist

arc $CH = \frac{1}{2} AB$, und $\measuredangle \alpha = \frac{w}{2}$;

Beweis. Es ist: $w = \alpha' + \alpha''$
und wegen $\alpha' = \alpha''$
hat man $w = 2\alpha' = 2\alpha''$;
und da $CF = OF$ und $DF \perp CO$ ist,
so hat man $CG = OG$,
daher $\alpha = \alpha''$;
folglich ist: $w = 2\alpha' = 2\alpha'' = 2\alpha$
oder $\alpha = \frac{w}{2}$ w. z. b. w.

Was nun von diesem Winkel gilt, das lässt sich auch von jedem andern nachweisen, da hier der Winkel AOB des Beweises wegen beliebig angenommen wurde.

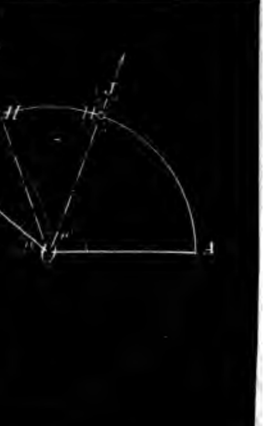
Dasselbe lässt sich auch von jedem andern Winkel, der grösser als 90, als 180, als 270° ist, nachweisen.

Halbirung eines gegebenen Winkels mittelst der obigen Bisectionslinie.

1) Es sei AOB (Fig. 29) der zu theilende Winkel, und zwar unter 90° oder im ersten Quadranten.

Man beschreibe aus O mit einem beliebigen Halbmesser (hier mit AO) einen Kreis, verlängere AO über O hinaus, und verbinde B mit C. Wird dann aus C mit CO der Kreis bei D und E geschnitten, ferner die DE gezogen, nnd durch den so erfolgten Durchschnittspunkt G aus dem Mittelpunkte O eine Gerade bis zu der Peripherie geführt, so erfolgt arc. $CH = \frac{1}{2} AB$ und $\measuredangle \alpha = \frac{1}{2} w$.

Fig. 30.



Der Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens erhellet aus dem Vorhergehenden. Ist der gegebene Winkel grösser als ein Rechter und nahe an $2R$, so muss die Bisectionslinie über den Kreis hinaus verlängert werden, wie dies aus dem nachfolgenden Beispiele zu ersehen ist.

2) Es sei AOB (Fig. 30) der zu theilende Winkel im zweiten Quadranten.

Man beschreibe aus dem Scheitelpunkte O mit einem beliebigen Halbmesser einen Kreis, verlängere den Schenkel AO bis zu der Peripherie, und durchschneide aus dem so erhaltenen Punkte C den Kreis bei D und E, ziehe DE und verlängere sie über D hinaus. Wird alsdann aus C durch B eine Gerade gezogen, bis die Verlängerung von DE bei G geschnitten ist, und der so erhaltene Durchschnittspunkt G mit O durch eine Gerade verbunden, so erfolgt arc $CBH = \frac{1}{3} AJB$ und $\measuredangle\, COH = \frac{1}{3} AOB$.

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Construction wird auf ähnliche Art wie zuvor geführt.

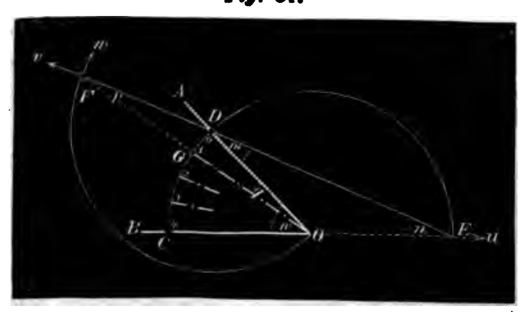
Die Viertheilung eines Winkels (Quadrisection).

Die unmittelbare Viertheilung eines Winkels ist nicht nur an und für sich interessant, sondern auch für die Trisectionsreihe $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{256}$ . . . sehr nothwendig, weil diese Reihe aus $\frac{1}{4}$ dadurch entsteht, indem man $\frac{1}{4}$ mit 4 dividirt und dasselbe für jedes nachfolgende Glied anwendet.

Die Viertheilung eines Winkels kann man wohl aus der Zweitheilung herleiten oder vermittelst der Zweitheilung ausführen; allein diess ist nicht so vortheilhaft, als das hier nachfolgende Verfahren.

1. Art der Viertheilung (Quadrisection).

Fig. 31.



Es sei AOB (Fig. 31) der zu theilende Winkel. — Man beschreibe aus O mit einem beliebigen Radius CO einen Halbkreis CDE, welcher den einen Schenkel des gegebenen Winkels in D, und die Verlängerung des andern in E schneidet. Wird nun aus dem Punkte E durch D eine Gerade geführt, ferner $DF = DO$ gemacht, und der so erhaltene Punkt F mit O durch eine Gerade verbunden, so schneidet diese den vierten Theil des gegebenen Winkels ab, so dass arc $DG = \frac{1}{4} CD$ und $\measuredangle\, DOG$ oder $q = \frac{1}{4} COD$ oder w ist.

Beweis. Da $DO = EO$ und $DF = DO$ gemacht wurde,

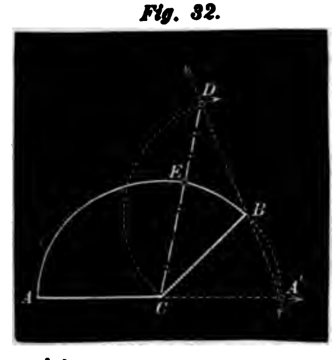
so ist $\measuredangle m = n$ und $\measuredangle p = q$;
es ist aber $\measuredangle m = p + q = 2p = 2q$
und ebenso $\measuredangle w = m + n = 2m = 2n$
daher $\measuredangle w = 2m = 2.2p = 4p$;
da aber $\measuredangle p = q$ ist,
so ist auch $\measuredangle 4q = w$,
folglich ist $\measuredangle q = \frac{w}{4}$ wie z. b. w.

Auf diese Art kann man also von jedem beliebigen Winkel den vierten Theil finden, somit die obige Trisections-Reihe $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{256}$ ... construiren, und zwar, indem man von dem gegebenen Winkel zuerst $\frac{1}{4}$, dann von diesem Viertel abermals $\frac{1}{4}$ u. s. w. sucht.

Wie man aus der Figur sieht, ist diese Construction höchst praktisch, und selbst bei den kleinsten Winkeln kann man sie mit gleich grossem Vortheile anwenden.

Nehmen wir jetzt einen andern Winkel an, z. B. einen Winkel, der im zweiten Quadranten, also über 90° ist.

Fig. 32.



Es sei also ACB (Fig. 32) der gegebene Winkel und AB der ihm entsprechende Bogen, wo von beiden der vierte Theil abgeschnitten werden soll. Man verlängere den Schenkel AC über den Scheitelpunkt C hinaus, mache $A'C = AC$, führe aus A' durch B eine Gerade, mache $BD = BC$ und verbinde den so erfolgten Punkt D mit C durch eine Gerade,

so ist

$$\text{arc } BE = \tfrac{1}{4} \text{arc } AB$$

und $$\measuredangle BCE = \tfrac{1}{4} ACB.$$

Der Beweis wird hier wie zuvor geführt, allein man kann ihn auch auf folgende Art geben:

Man verlängere den zweiten Schenkel BC (Fig. 33), und ebenso auch die CD über den Scheitelpunkt C hinaus, und setze der Kürze wegen den Winkel

Fig. 33.



$ACE = \alpha$,
ferner $\sphericalangle A'CF = ACB = \alpha'$,
und $\sphericalangle BDC = \beta$;
dann $\sphericalangle BCD = BDC = \beta'$,
und $\sphericalangle BA'C = \gamma$,
zuletzt $\sphericalangle A'BC = \gamma'$ u. s. w.,
so hat man, da $BD = BC = A'C = FC$ ist,

$$\sphericalangle \alpha' = \beta + \gamma,$$

ferner $\gamma = \gamma'$
und $\gamma' = \beta + \beta'$,
somit da $\beta' = \beta$ ist,

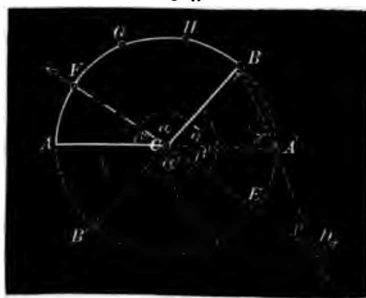
$$\sphericalangle \alpha' = \beta + \beta + \beta' = \beta' + \beta' + \beta',$$

daher $\sphericalangle \alpha' = 3\beta = 3\beta'$,
also auch $\alpha = 3\beta'$;
addirt man zu dieser Gleichung, und zwar beiderseits β' hinzu,
so folgt: $\sphericalangle \alpha + \beta' = 4\beta'$;
und da $\sphericalangle \alpha + \beta' = ACB$ ist,
so folgt $\sphericalangle ACB = 4\beta'$,
somit ist $\beta' = \frac{1}{4} ACB$ w. z. b. w.

Wie man schon aus der Construction sieht, ist dieses Verfahren höchst einfach, und zwar so, dass es alle bisher bekannten Constructionen weit hinter sich zurücklässt.

Was das Ziehen der Hilfslinie $A'D$ anbelangt, so ist es gleichgiltig, nach welcher Richtung hin sie verlängert wird; man kann also die Gerade aus dem Punkte A' durch B, oder auch aus B durch A' als Hilfslinie ziehen, und auf dieser dann von B oder von A' aus den Halbmesser auftragen.

Fig. 34.



Es sei ACB (Fig. 34) der gegebene Winkel, und AGB der ihm entprechende Bogen, welcher in vier gleiche Theile getheilt werden soll, so dass die Hilfslinie hierbei nicht über B hinaus verlängert werden darf. Wird also $A'B$ über A' hinaus verlängert, $A'D = A'C = AC$ abgeschnit-

ten, alsdann aus D durch den Mittelpunkt C eine Gerade gelegt; so erfolgt:

$$\text{arc.}\, A'E = \text{arc.}\, AF = \tfrac{1}{4}\text{arc.}\, AGB$$

und $$\sphericalangle A'CE = A'DE = ACF = \tfrac{1}{4} ACB.$$

Beweis. Setzt man der Kürze wegen den Winkel

$$BCF = \alpha,\ BDC = \beta,\ DBC = \gamma,\ A'CB = \delta,$$

ferner $B'CE = \alpha', A'CE = \beta', ACF = \beta''$ u. s. w.;

so hat man $\sphericalangle \alpha = \beta + \gamma$;

und da $\gamma = \gamma' = \beta + \beta' = 2\beta = 2\beta'$ ist,

so folgt $\sphericalangle \alpha = \beta + 2\beta = \beta' + 2\beta' = 3\beta = 3\beta'$,

also ist $\sphericalangle \alpha = 3\beta'$;

addirt man hier beiderseits β' oder $\beta'' = \beta'$ hinzu, so folgt

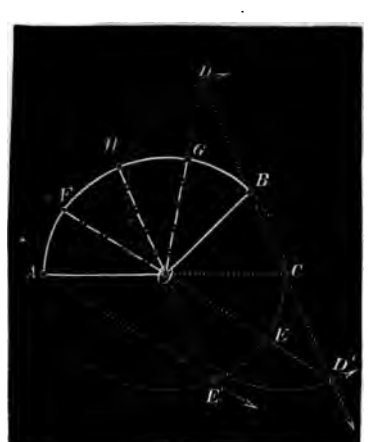
$\sphericalangle \alpha + \beta'' = 4\beta'$, und da $\sphericalangle ACB = \alpha + \beta''$ ist,

so folgt $\sphericalangle ACB = 4\beta'$

oder $\beta = \beta' = \beta'' = \tfrac{1}{4} ACB$ w. z. b. w.

Verbindet man diese beiden Constructionen mit einander in eine Figur (Fig. 35), so hat man hier die beiden äussern Theilungspunkte an Ort und Stelle, wo sie sein sollten; und wird überdiess aus dem Punkte O zu DD' eine Parallele gezogen, so erfolgt der Punkt H als der mittlere Theilungspunkt.

Fig. 35.



Diesen mittleren Theilungspunkt kann man auch dadurch erhalten, indem man die Verlängerung von CD', welche hier in der Figur mangelt, gleich der Geraden OD' macht, den so erfolgten Punkt D'' mit A verbindet, und aus dem in der Peripherie des Kreises erhaltenen Punkte E' durch O eine Gerade führt u. s. w.

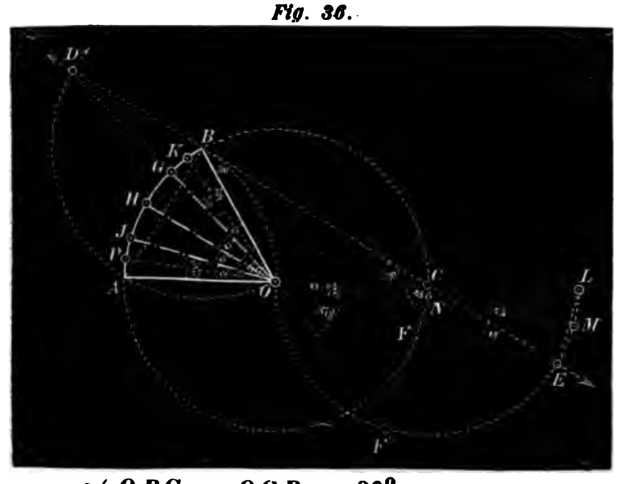
Man hat somit folgenden Satz über die unmittelbare Viertheilung eines beliebigen Winkels: Jeder gegebene Winkel wird in vier gleiche Theile getheilt, indem man die Sehne des Ergänzungswinkels zu 180° beiderseits verlängert, jede Verlängerung gleich dem Halbmesser macht, aus den so bestimmten Punkten der beiden

Verlängerungen durch den Mittelpunkt Gerade legt, und dann zu der Sehne des Ergänzungswinkels durch den Mittelpunkt eine Parallele zieht.

Werden nun für diese Construction bestimmte Winkel angenommen, so kommt man hierdurch sehr leicht auf einige richtige Constructionen der Polygone.

Ist z. B. (Fig. 36) der Winkel $AOB = 60^\circ$, so hat man, wenn die Sehne des Ergänzungswinkels gezogen, dann beiderseits verlängert, und jede der Verlängerungen gleich dem Halbmesser gemacht wird:

Fig. 36.



$\measuredangle OBC = OCB = 30^\circ$,

somit $\measuredangle BDO = BOD = \frac{1}{2} OBC = 15^\circ$,

und ebenso $\measuredangle CEO = COE = \frac{1}{2} OCB = 15^\circ$;

und da $360 : 24 = 15$ ist, so ist die Sehne $AJ = JH = HG = GB =$ der Sehne eines 24ecks.

Halbirt man die Sehne OE so wie den ihr entsprechenden Bogen $OF'E$, und führt aus dem so erfolgten Punkte F' durch den Mittelpunkt O eine Gerade, so hat man:

arc BK = arc GK

und $\measuredangle BOK = \measuredangle GOK$;

denn es ist: $\measuredangle OCE = 150^\circ$,

daher $\measuredangle OCF' = ECF' = 75^\circ$,

folglich ist $\measuredangle EOF' = \frac{1}{2} ECF' = 37\frac{1}{2}^\circ$;

es ist aber $\measuredangle JOK = EOF' = 37\frac{1}{2}^\circ$,

und da $\measuredangle JOG = \frac{1}{2} AOB = 30^\circ$ ist, so folgt durch Sub-

traction $\measuredangle JOK - JOG = GOK = 7\frac{1}{2}^{\circ}$,
und da $360 : 7\frac{1}{2} = 48$ ist, so ist auch
die Sehne $BK = GK =$ der Seite eines 48ecks.

Diese Sehne oder Seite eines 48eckes wird auch dadurch erhalten, indem man aus H durch C eine Gerade führt, bis sie die Verlängerung des Bogens $OF'E$ d. i. EL bei M schneidet, sodann aus M durch O eine Gerade führt, bis der Bogen AB bei P geschnitten ist, wodurch $AP = JP =$ der Seite eines 48eckes erfolgt; denn es ist: $\measuredangle AOH = 30^{0}$ und $OHC = OCH = \frac{1}{2} AOH = 15^{\circ}$, ferner $\measuredangle COM = CMO = \frac{1}{2} OCH = \frac{1}{4} AOH = 7\frac{1}{2}^{\circ}$; folglich ist arc $AP =$ arc $JP = BK = GK$;
daher die Sehne $AP = PJ = GK = KB =$ der Seite eines 48eckes.

Fährt man nun so fort, indem man die bereits gefundenen Theilungspunkte des gegebenen Bogens benützt, so erhält man ferner den Bogen von $3\frac{3}{4}^{\circ}$, $1\frac{7}{8}^{\circ}$, $\frac{15}{16}^{\circ}$, $\frac{15}{32}^{\circ}$ u. s. w., wodurch man also weiter die Seite eines 96ecks, eines 192eckes, eines 384eckes, eines 768eckes u. s. w. findet.

Trisection.

I. Methode der Dreitheilung (Trisection) des Winkels

mittelst der Reihe nach der ersten Art der Zweitheilung (Bisection).

Werden von der Reihe $\frac{1}{4}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{4^3}, \frac{1}{4^4}, \frac{1}{4^5}, \frac{1}{4^6} \ldots$ vier Glieder summirt, so erhält man nahe ein Drittel; denn es ist:

$$\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{256} = \frac{64 + 16 + 4 + 1}{256} = \tfrac{85}{256};$$

vergleicht man diesen Bruch mit $\frac{1}{3}$, so erhält man, wenn beide Brüche auf gleiche Benennung gebracht und von einander abgezogen werden,

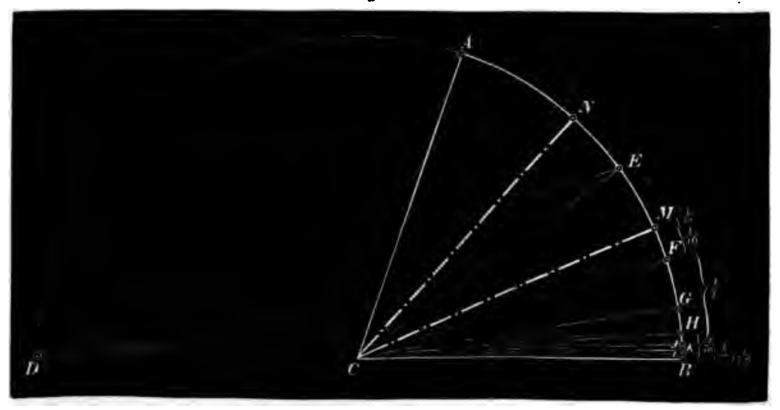
$$\tfrac{1}{3} - \tfrac{85}{256} = \frac{256 - 255}{768} = \tfrac{1}{768};$$

also ist die Summe von vier Gliedern der obigen Reihe nahe $\frac{1}{3}$, wobei der Fehler $= \frac{1}{768}$ oder $= 0{\cdot}0013020 = \frac{13}{10000}$.

Obgleich nun dieser Fehler, numerisch betrachtet, gross zu sein scheint, so können wir doch mittelst der vier Glieder die Trisection des Winkels vornehmen, weil dieser Fehler bei unsern gewöhnlichen Zeichnungen gar nicht sichtbar ist, und daher auch ohne weiters weggelassen werden kann.

Es sei nun *ACB* (Fig. 37) der zu theilende Winkel. Man

Fig. 37.



suche von dem gegebenen Winkel *ACB* nach der zuvor angegebenen Bisections-Methode das Viertel *BCF*; dann von diesem Viertel abermals ein Viertel *BCH*, welches von dem gegebenen Winkel $\frac{1}{16}$ sein wird; von dem so gefundenen $\frac{1}{16}$ suche man wieder das Viertel, welches von dem gegebenen Winkel $\frac{1}{64}$ sein wird, und endlich von diesem $\frac{1}{64}$ ebenfalls $\frac{1}{4}$ gesucht, gibt *BCL*, welches von dem gegebenen Winkel $\frac{1}{256}$ sein wird.

Es ist also:

$$\sphericalangle BCF = \tfrac{1}{4} ACB,$$
$$\sphericalangle BCH = \tfrac{1}{4} BCF = \tfrac{1}{16} ACB,$$
$$\sphericalangle BCK = \tfrac{1}{4} BCH = \tfrac{1}{16} BCF = \tfrac{1}{64} ACB,$$
$$\sphericalangle BCL = \tfrac{1}{4} BCK = \tfrac{1}{16} BCH = \tfrac{1}{64} BCF = \tfrac{1}{256} ACB,$$

daher

$$\tfrac{1}{4} ACB + \tfrac{1}{16} ACB + \tfrac{1}{64} ACB + \tfrac{1}{256} ACB = \tfrac{1}{3} ACB$$

näherungsweise.

Werden also die diesen Winkeln entsprechenden Bogenstücke continuirlich nach einander auf dem Bogen des gegebenen Winkels aufgetragen, so wird die so erfolgte Summe auf dem gegebenen Bogen dreimal enthalten sein, und zwar mit solcher Genauigkeit, als man sich dies insbesondere beim praktischen Zeichnen nur wünschen kann.

Dadurch wird also der gegebene Bogen in drei gleiche Theile getheilt, und wenn man die so erhaltenen Theilungspunkte des Bogens mit dem Scheitelpunkte durch Gerade verbindet, so wird durch letztere auch der Winkel in drei gleiche Theile getheilt.

Sollte nun das Halbiren auf eine andere Art vorgenommen werden, so ist es sehr schwer das $\frac{1}{64}$, noch schwerer aber das $\frac{1}{256}$ des gegebenen Bogens zu bestimmen, daher ist die gewöhnliche Verfahrungsart nur dann anwendbar, wenn das Halbiren und somit auch das Vierteln des gegebenen Bogens auf die angegebene Art vorgenommen wird.

Denn wird das Halbiren mittelst der zwei Bögen auf die gewöhnliche Art bei kleinen Winkeln vorgenommen, so kann man kaum die Hilfsbögen beschreiben, wenn der Halbmesser für dieselben zu klein angenommen wird; wird er aber zu gross angenommen, so fallen die Bogen zu sehr in einander; aus welchem Grunde die gewöhnliche Art des Halbirens nicht immer praktisch und daher auch für die Dreitheilung nicht anwendbar ist.

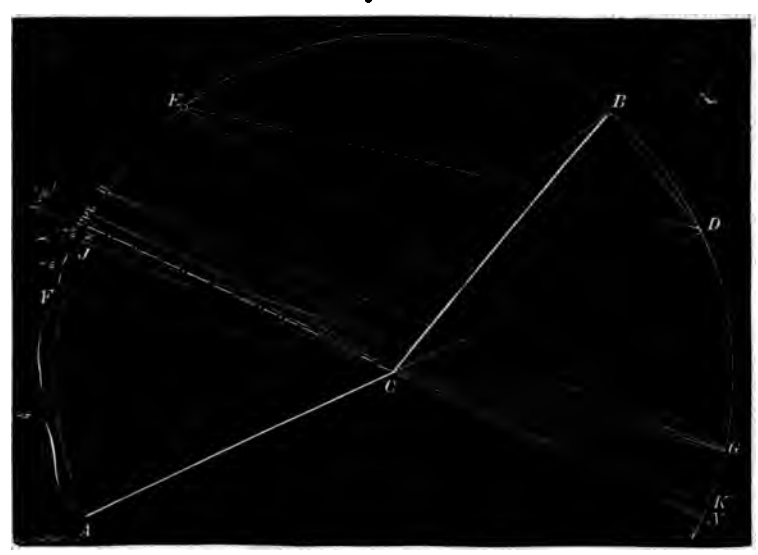
Ebenso unzweckmässig ist das Halbiren durch Versuche, indem der Bogen zu sehr durchstochen, und daher auch die Hälften sehr ungenau erhalten werden.

Man kann daher nur nach der angegebenen Bisections-Methode jeden noch so kleinen Winkel genau halbiren, und dies zur Trisection mit Vortheil benützen.

Bei der angeführten Trisections-Methode entsteht nur noch der Übelstand, dass man die Bogen, welche zusammengenommen den dritten Theil des gegebenen Winkels ausmachen, erst zusammensetzen muss, wodurch mehrere Fehler begangen werden. Es ist daher sehr nothwenig die Construction so auszuführen, dass man die Theile, welche zusammengenommen den dritten Theil ausmachen, neben einander erhält; und man wird desshalb auf folgende Art verfahren müssen:

Es soll z. B. der Winkel *ACB* (Fig. 38) in drei gleiche Theile getheilt werden. Man halbire zuerst den Bogen *AB* in *E*,

Fig. 38.



indem man die *CE* ‖ *BD* oder ⊥ *AB* zieht; theile dann die so erfolgte Hälfte *AE* bei *F* ebenfalls in zwei gleiche Theile, indem man die Gerade *CF* ‖ *DE* führt; so ist dann

$$\text{arc}\,AF = \text{arc}\,EF = \tfrac{1}{4}AB.$$

Nun wird der Radius CF über C hinab bis zu dem Peripheriepunkte G verlängert, ferner der so erhaltene Punkt G mit E durch Gerade verbunden, die $CH \parallel EG$ gezogen, G mit H verbunden und die $CJ \parallel GH$ geführt, wodurch

$$\text{arc}\, FJ = \tfrac{1}{4} EF = \tfrac{1}{16} AB$$

erfolgt.

Nun wird auch dieser Radius JC über C hinab bis zu der Peripherie verlängert, der so erhaltene Punkt K mit H verbunden, ferner die $CL \parallel HK$ gezogen, L mit K verbunden, und die $CM \parallel LK$ geführt, wodurch

$$\text{arc}\, JM = \tfrac{1}{4} JH = \tfrac{1}{4} FJ = \tfrac{1}{64} AB.$$

wird.

Es ist aber $LM = JM$, und wird endlich auch von diesem Bogen der vierte Theil gesucht, so erhält man

$$\text{arc}\, MQ = \tfrac{1}{4} LM = \tfrac{1}{4} JM = \tfrac{1}{256} AB.$$

Man hat somit, wie die Zeichnung hier zeigt, alle vier Theile, Summanden, woraus das gesuchte Drittel näherungsweise besteht, auf dem gegebenen Bogen unmittelbar neben einander. Ebenso könnte man die Theilung noch weiter fortsetzen, was jedoch in diesem Falle weiter mit freien Augen nicht so leicht geschehen kann.

Die obgefundenen Theile, ihrer Ordnung nach neben einander zusammengestellt, hat man:

$$\text{arc.}\, AF = \tfrac{1}{4} AB$$
$$\text{arc}\, JF = JH = \tfrac{1}{4} EF = \tfrac{1}{4} AF = \tfrac{1}{16} AB$$
$$\text{arc}\, JM = \tfrac{1}{4} JH = \tfrac{1}{4} JF = \tfrac{1}{16} EF = \tfrac{1}{16} AF = \tfrac{1}{64} AB$$
$$\text{arc}\, MQ = \tfrac{1}{4} LM = \tfrac{1}{4} JM = \tfrac{1}{16} JH = \tfrac{1}{16} JF =$$
$$= \tfrac{1}{64} EF = \tfrac{1}{64} AF = \tfrac{1}{256} AB,$$

folglich auch:

$$\text{arc}\, MQ + JM + FJ + AF = (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{256}) AB;$$

oder da

$$MQ + JM + FJ + AF = AQ$$

und $\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{256} = \dfrac{64 + 16 + 4 + 1}{256} = \tfrac{85}{256}$ ist,

$$\text{arc}\, AQ = \tfrac{85}{256},$$

also ist arc $AQ = \frac{1}{3} AB$ näherungsweise mit dem obangezeigten Fehler.

Diesen Bögen entsprechen auch die Winkel, sobald die Halbmesser gezogen werden, so dass man dann der Ordnung nach Folgendes hat:

$$\sphericalangle ACF = \tfrac{1}{4} ACB$$
$$\sphericalangle JCF = JCH = \tfrac{1}{4} ECF = \tfrac{1}{4} ACF = \tfrac{1}{16} ACB$$
$$\sphericalangle JCM = \tfrac{1}{4} JCH = \tfrac{1}{4} JCF = \tfrac{1}{16} ECF = \tfrac{1}{16} ACF = \tfrac{1}{64} ACB$$
$$\sphericalangle MCQ = \tfrac{1}{4} LCM = \tfrac{1}{4} JCM = \tfrac{1}{16} JCH = \tfrac{1}{16} JCF = \tfrac{1}{64} ECF = \tfrac{1}{64} ACF = \tfrac{1}{256} ACB$$

folglich auch:

$$\sphericalangle MCQ + JCM + JCF + ACF = (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{256}) ACB;$$

und da

$$\sphericalangle MCQ + JCM + JCF + ACF = \sphericalangle ACQ,$$

ferner $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} = \frac{85}{256}$ = nahe $\frac{1}{3}$ gesetzt werden kann, so hat man $\sphericalangle ACQ = \frac{85}{256}$ = nahe $\frac{1}{3} ACB$.

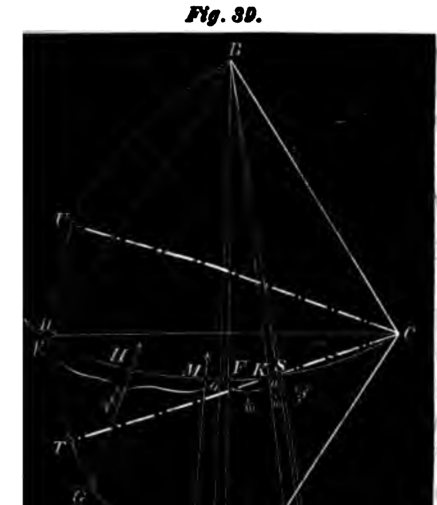
Wollte man nach dieser Construction auch noch das fünfte Glied der Trisectionsreihe suchen, so könnte dies mit unseren gewöhnlichen Instrumenten nicht ausgeführt werden; denn, wie man sieht, ist schon das vierte Glied eine äusserst geringe Grösse, ungefähr gleich der Dicke des gewöhnlichen Zeichenstriches, wie sollte nun dieser seiner Dicke nach getheilt werden? Doch darf das vierte Glied nicht so leicht weggelassen werden, weil dieser Theil verdreifacht, daher beim Auftragen auf dem Bogen des gegebenen Winkels sehr fühlbar wird.

Um das Anhäufen von Linien zu vermeiden, sucht man das letzte Viertel lieber nach dem Augenmasse, welches ungefähr = der Dicke eines Striches sein wird.

II. Trisections-Methode
mittels der vierten Art der Bisection.

Es sei ACB (Fig. 39) der zu theilende Winkel. — Zieht man AB als Sehne des ganzen Winkels, dann aus B durch D die Bu als Sehne sammt Verlängerung für den halben Winkel, und beschreibt überdies aus B mit BC einen Bogen Cv, der die Verlängerung der Sehne des halben Winkels in E, und die Sehne des ganzen Winkels in F schneidet, so hat man arc. $EF = \frac{1}{4}$ arc. AB. Trägt man nun EF auf dem Bogen AB von A aus einmal auf, so dass $AG = EF$ ist, zieht aus G gegen B eine Gerade bis H, macht $AJ = FH$, und verbindet J mit B, so ist arc $FK = \frac{1}{16}$ arc AB. Macht man $AL = FK$, zieht aus L gegen B eine Gerade bis M, schneidet $JN = FM$ ab und verbindet N mit B, so erfolgt arc $KO = \frac{1}{64}$ arc AB. Macht man $AP = KO$, zieht aus P gegen B eine Gerade bis Q, trägt die

Fig. 39.



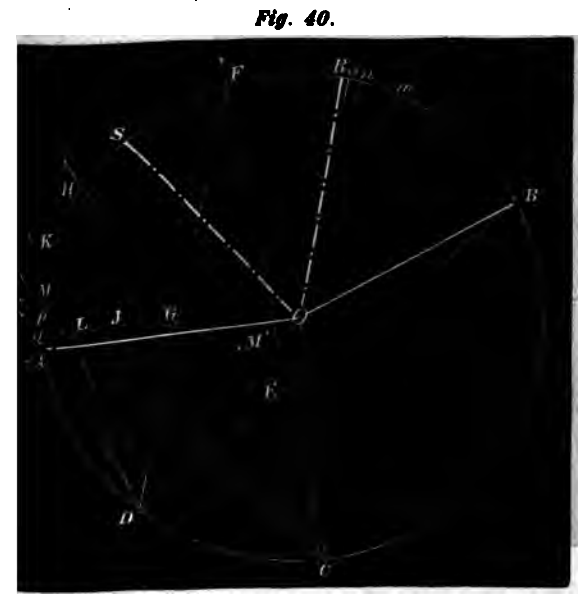
FQ von *N* nach *R*, und verbindet *R* mit *B*, so erhält man arc $OS = \frac{1}{256}\,AB$.

Man erhält somit die 4 zu einem Drittel des Bogens *AB* erforderlichen Glieder der Trisectionsreihe $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} \ldots$, welche hier leicht zu construiren, deutlich wahrzunehmen und bei einander zusammenhängend sind.

Trägt man nun $ES = EF + FK + KO + OS$ auf *AB* auf, so erfolgt dadurch die verlangte Dreitheilung des Bogens bei *T* und *U*, welche Punkte mit *C* durch Gerade verbunden auch die Dreitheilung des Winkels *ACB* geben.

III. Trisections-Methode
mittels des Bisections-Kreises und der Trisections-Reihe.

Fig. 40.



Es sei der ∢ *AOB* (Fig. 40) und der ihm entsprechende Bogen *AFB* gegeben. Man mache $CO \perp AO$ in *O*, verlängere den Bogen *AFB* über *A* hinab bis *CO* in *C* geschnitten wird, halbire dann den Bogen *ADC* in *D*, und beschreibe aus D

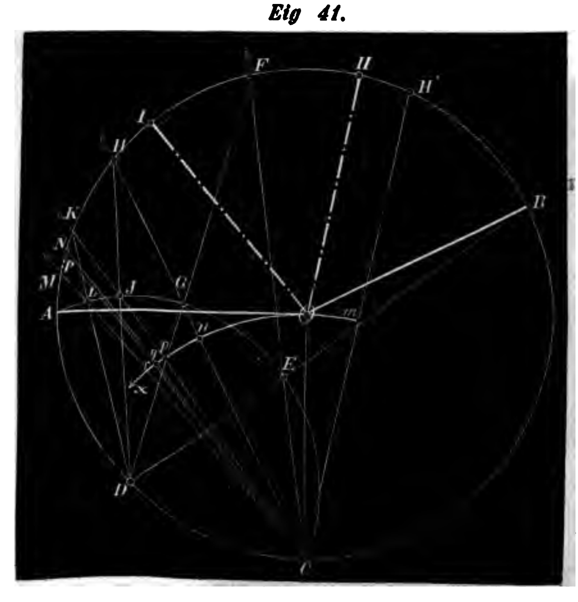
mit dem Radius gleich der Entfernung AD den Bisections-Bogen $AM'C$. Nun suche man nach der Bisections-Methode zuerst $\frac{1}{4}$, dann $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$ und allenfalls auch $\frac{1}{256}$ von AB, trage diese Theile auf den Bogen AFB neben einander auf, so erhält man den dritten Theil desselben.

Man erhält nämlich $AH = \frac{AB}{4}$, indem man zuerst die Gerade BD, dann durch E die CF, ferner DF und aus C durch G die CH zieht; es werden daher für jedes Viertel von dem gefundenen Viertel 4 Linien erfordert, allein man braucht keine von ihnen zu ziehen, wenn man sich den Gang der Sache gemerkt hat; weil man eigentlich nur die Punkte braucht, welche mittels der Einschnitte in dem Bisections-Bogen, wie auch in dem zu theilenden Bogen erhalten werden, wie diess hier durch die Pfeile angezeigt ist.

In wie ferne diese Methode genau ist, hängt von der Anzahl Glieder der Trisections-Reihe ab, die man bei der Trisection verwendet. Hier sind ihrer nur drei, welche gehörig addirt, sodann diese Summe auf dem zu theilenden Bogen aufgetragen, die Theilungspunkte R und S mit einer hinlänglichen Genauigkeit geben.

Bei dieser Methode ist also der Übelstand vorhanden, dass die Theile nicht neben einander, sondern zerstreut auf dem Bogen sich befinden; es ist daher sehr wünschenswerth, gleich bei der Construction diese Theile neben einander zu haben, damit man durch das Auftragen keinen grossen Fehler begehe.

Fig. 41.



Um diess zu erreichen, verfahre man mit dem Halbiren auf obige Art bis zu $\frac{1}{16}$ AB also hier (Fig. 41) bis man den Punkt M

erhält; halbire dann den Bogen KM in N, und theile die hierdurch erhaltene Hälfte MN in 4 gleiche Theile. Wird nun aus was immer für einem Punkte des Grundkreises, hier aus C mit dem Radius dieses Kreises ein Bogen mx beschrieben, sodann die Punkte H', H, K, N und P mit dem Punkte C durch Gerade verbunden, so erhält man den Bogen

$$mn = \tfrac{1}{4} AB, \text{ weil } HH' = \tfrac{1}{2} AB \text{ ist,}$$
$$np = \tfrac{1}{16} AB, \quad ,, \quad HK = \tfrac{1}{8} AB \quad ,,$$
$$pq = \tfrac{1}{64} AB, \quad ,, \quad KN = \tfrac{1}{32} AB \quad ,,$$
$$qr = \tfrac{1}{256} AB, \quad ,, \quad NP = \tfrac{1}{128} AB \quad ,,$$

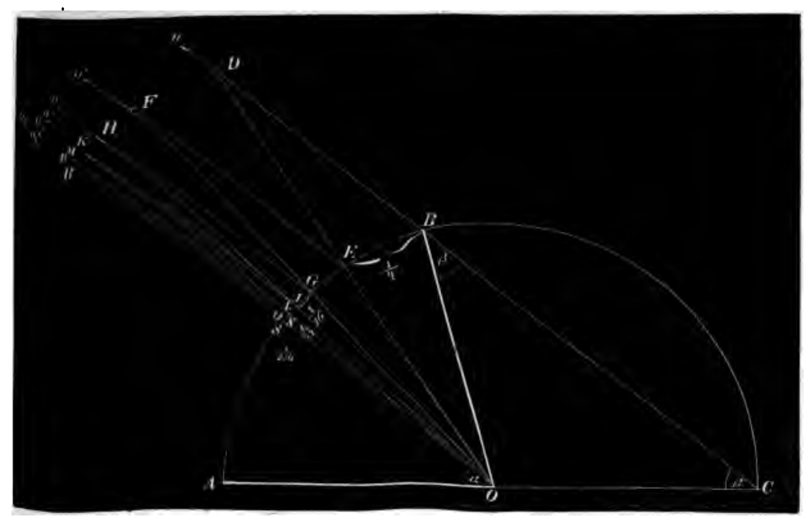
somit $mn + np + pq + qr = (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{256}) AB$
$= \tfrac{1}{3} AB$ näherungsweise.

IV. Trisections-Methode

mittels der Trisections-Reihe mit Hilfe der II. Art der Viertheilung (Quadrisection).

Es sei AOB (Fig. 42) der zu theilende Winkel. Man beschreibe aus dem Scheitelpunkte O einen Halbkreis, verlängere AO

Fig. 42.



über O hinaus bis C, lege aus C durch B eine Gerade Cu, mache das Stück $BD = BO$, und verbinde D mit O, so hat man

$$BO = CO \text{ ist,}$$

da $\sphericalangle BCO = CBO$;

es ist aber

$$\sphericalangle AOB = CBO + BCO = 2CBO = 2BCO,$$

folglich $\sphericalangle CBO = BCO = \frac{AOB}{2}$

Da ferner $BD = BO$ ist,

so ist auch $\sphericalangle BDO = BOD$;

und da $\sphericalangle CBO = BDO + BOD$ ist,

so folgt auch $\sphericalangle CBO = 2BDO = 2BOD$,

daher $\sphericalangle BOD = \frac{1}{2} CBO = \frac{1}{4} AOB$,

somit ist auch der Bogen $BE = \frac{1}{4} AB$.

Wird nun durch den Durchschnittspunkt E die $Eu' \parallel$ gezogen und $EF = EO$ gemacht, so ist

$\sphericalangle DEF = BDE$

und $\sphericalangle EOF = EFO$;

es ist aber $DEF = EOF + EFO = 2E$

$= 2E$

folglich ist $\sphericalangle EOF = \frac{1}{2} DEF = \frac{1}{2} BDE = \frac{1}{2} B$

$= \frac{1}{4} CBO = \frac{1}{8} A$

Daher ist auch der Bogen $EG = \frac{1}{8} AB$.

Wird ferner durch den Punkt G eine Parallele zu Eu' g gen, dann $GH = GO$ gemacht, und der Punkt H mit O d eine Gerade verbunden, so erhält man nach ähnlicher Folgeru

$\sphericalangle GOJ = \frac{1}{16} AOB$,

daher auch arc $GJ = \frac{1}{16} AB$.

Wird nun diese Construction fortgesetzt, so erhält man w $\sphericalangle JOL = \frac{1}{32} AOB$, und $\sphericalangle LON = \frac{1}{64} AOB$ u. s.

Man erhält somit die nachfolgende Reihe:

$$\text{arc } BE = \tfrac{1}{4} AB = \frac{1}{2^2} AB$$

$$\text{arc } EG = \tfrac{1}{8} AB = \frac{1}{2^3} AB$$

$$\text{arc } GJ = \tfrac{1}{16} AB = \frac{1}{2^4} AB$$

$$\text{arc } JL = \tfrac{1}{32} AB = \frac{1}{2^5} AB$$

$$\text{arc } LN = \tfrac{1}{64} AB = \frac{1}{2^6} AB.$$

Da wir hier zur Trisection nur die drei bekannten Glieder b chen, so folgt arc $BE + GJ + LN = \frac{1}{4} AB + \frac{1}{16} AB + \frac{1}{64}$

$= (\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64})\, AB$; daher, weil $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}$ näherungsweise $= \frac{1}{3} AB$ gesetzt werden kann, folgt

$$\text{arc } BE + GJ + LN = \tfrac{1}{3} AB.$$

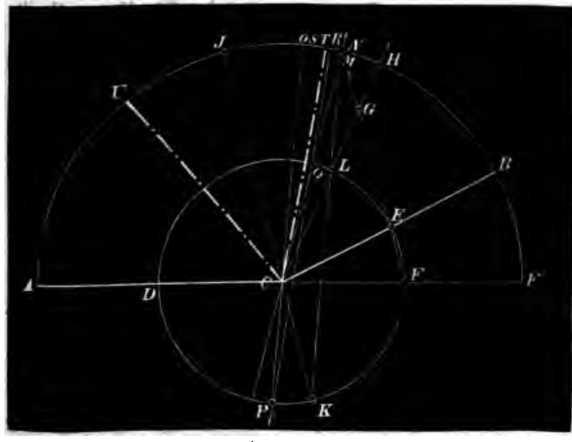
V. Methode der Dreitheilung (Trisection)

mittels der Trisections-Reihe, nach der zweiten Art der Viertheilung (Quadrisection).

Bei der früher angegebenen Construction haben wir jedesmal um den vierten Theil des Bogens zu finden, denselben zuerst halbiren müssen, wodurch sich bei der Construction im Ganzen zu viele Linien anhäufen. Nachdem wir aber eine vortreffliche Methode für die Viertheilung des Winkels aufgestellt und bewiesen haben, so können wir uns derselben mit grossem Vortheile auch bei der Trisection bedienen, und zwar so, dass wir auch bei diesem Verfahren die Theile, woraus das zu suchende Drittel besteht, unmittelbar nebeneinander haben.

Es sei ACB (Fig. 43) der gegebene Winkel. Man verlängere AC über C hinaus, beschreibe aus dessen Scheitelpunkte C mit einem Halbmesser $= \frac{1}{2} AC$ einen Kreis, hier den Kreis $DLFK$, führe aus dem Punkte F durch E eine Gerade, mache das Stück $EG = CE$, und ziehe aus C durch den so erhaltenen Punkt G eine Gerade, so ist nach dem früher bewiesenen

Fig. 43.



$$\sphericalangle BCG = \tfrac{1}{4} ACB,$$

also auch

$$\text{arc. } BH = \tfrac{1}{4} AB;$$

nun mache man arc. $JH = BH$, verbinde J mit C, verlängere die JC über C hinab bis K; führe dann aus K durch L eine Gerade, mache $LM = CL$, und führe aus C durch M den Strahl CN, so ist der Winkel $HCN = \frac{1}{4} JCH = \frac{1}{4} BCH = \frac{1}{16} ACB$.

Macht man ferner $NO = HN$, zieht die CO und verlängert sie bis P, führt aus P durch Q eine Gerade, macht das Stück $QR = CQ$ und verbindet den so erhaltenen Punkt R mit C, so ist: $\measuredangle NCR = \frac{1}{4} MCO = \frac{1}{4} HCN = \frac{1}{16} JCH = \frac{1}{16} BCH = \frac{1}{64} ACB.$

Ebenso wird auch von diesem letzteren Winkel der vierte Theil gesucht, welcher dann von dem gegebenen der $\frac{1}{256}$ sein muss.

Man hat hier also alle vier Theile beisammen, und zwar:

$$\text{arc } BH + HN + NR + RT = BT,$$

und $\measuredangle\, BCH + HCN + NCR + RCT = BCT$;

somit $\text{arc. } BT = \frac{1}{3} AB$

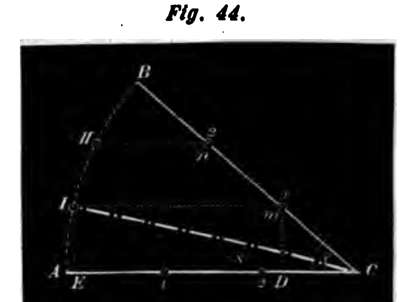
und $\measuredangle\, BCT = \frac{1}{3} ACB$

näherungsweise.

VI. Trisections-Methode.

Betrachten wir ACB (Fig. 44) als einen Kreisausschnitt, und denken uns dessen Bogen AB sehr klein, so kann er mit einem Dreiecke verwechselt werden.

Fig. 44.



Ist nun in diesem die Seite BC in 3 gleiche Theile getheilt, so wird auch die zweite Seite, d. i. AB, ebenfalls in drei gleiche Theile getheilt, wenn man zu der dritten, d. i. zu AC, durch die Theilungspunkte der BC Parallele zieht.

Um nun bei einem gegebenen Winkel das lästige Eintheilen zu vermeiden, nehme man auf dem einen Schenkel hier auf BC eine beliebige Einheit CI, trage solche auf dem einen Schenkel, auf CB, dreimal auf, ziehe sodann durch die Theilungspunkte zu dem zweiten Schenkel AC Parallele, wodurch der Bogen AB näherungsweise in drei gleiche Theile getheilt wird.

Es kann also dieses Verfahren bei einem Winkel, welcher sehr klein ist, jedenfalls mit Vortheil angewendet werden, ohne dass man einen erheblichen Fehler begeht.

Wir wollen nun untersuchen, in wie ferne dieses uralte Verfahren beschränkt ist.

Ziehen wir zu diesem Behufe Dm und $EI \perp AC$, so ist, da $Im \parallel AC$ ist, $Dm = EI$, d. h. es ist der Sinus des Winkels ACI für den Halbmesser $= 1$ gleich dem Sinus des gegebenen Winkels für den Halbmesser $= \frac{1}{3}$.

Bezeichnen wir den gegebenen Winkel mit φ, so haben wir, da das Dreieck DmC rechtwinklig ist:

$$Dm = Cm \sin\varphi.$$

Geben wir nun dem Winkel ACB nach und nach verschiedene Werthe und zwar sei $\varphi = 15^0$, so ist

$$Dm = \tfrac{1}{3}\sin 15^0 = 0\cdot3333333 \sin 15^0,$$

und $\log Dm = \log 0\cdot333\ldots + \log 15^0$;

nun ist

$\log 0\cdot3333333 = 0\cdot5228787 - 1$

und $\log\sin 15^0 = 9\cdot4129962 - 10$, welches addirt,

gibt $9\cdot9358749 - 11$;

daher $\log Dm = 0\cdot9358749 - 2$

Diesem entspricht $0\cdot086273$,

also ist $Dm = 0\cdot086273$.

Vergleicht man diesen Werth mit dem Sinus von 5^0, so hat man, da der Werth für $\sin 5^0 = 0\cdot0872$

und der gefundene $= 0\cdot0862$ ist,

der Unterschied $= 0\cdot0010$.

Also ist der Fehler $F = 0\cdot001 = \frac{1}{1000}$,

daher bei 15^0 noch sehr gering.

Um diesen Fehler im Gradmasse zu bestimmen, hat man

$$EI = CI \sin x,$$

$$\sin x = Dm = 0\cdot086273,$$

und $\log\sin x = \log 0\cdot086273$;

nun ist $\log 0\cdot086273 = 0\cdot9358749 - 2$

also $\log\sin x = 8\cdot9358749 - 10$

Diesem entspricht $4^0\,56'\,50''$,

es ist daher das gesuchte Drittel, hier

$$x = 4^0\,56'\,57''$$

Da nun $\frac{\varphi}{3} = \frac{15}{3} = 4^0\,59'\,60''$ ist,

so hat man den Fehler $F = 0^0\;\;3'\;\;3''$.

Setzen wir $\varphi = 30^0$, so haben wir

$$Dm = 0\cdot333\ldots \times \sin 30^0$$

nun ist $\log 0{\cdot}3333333 = 0{\cdot}5228787 - 1$
und $\log \sin 30^0 = 9{\cdot}6989700 - 10$, welches addirt,
gibt $10{\cdot}2218487 - 11$
daher ist $\log Dm = 0{\cdot}2218487 - 1$
Diesem entspricht $0{\cdot}1666666$
also ist $Dm = 0{\cdot}1666\ldots\ldots \doteq \sin 10^0$,
es ist aber $\sin 10^0 = 0{\cdot}1736$
daher ist der Fehler $F = 0{\cdot}0070 = \frac{7}{1000}$

Da nun $\sin x = Dm$ ist, so brauchen wir nur von dem obigen Logarithmus die entsprechende Zahl in Gradmasse zu suchen.

Denn es ist

$$\log \sin x = 9{\cdot}2218487 - 10$$

Diesem entspricht $9^0\,35'\,38''$

Da nun $\frac{\varphi}{3} = \frac{30}{3} = 9^0\,59'\,60''$ ist
und $x = 9^0\,35'\,38''$ gefunden wurde,
so folgt der Fehler $F = 0^0\,24'\,22''$.

Setzt man hingegen den Winkel $\varphi = 6^0$, so findet man auf ähnliche Art

$DM = 0{\cdot}034842$
und da $\sin 2^0 = 0{\cdot}034899$ ist,
so folgt der Fehler $F = 0{\cdot}000057$;
da also hier $\measuredangle\, x = 1^0\,59'\,48''$
und da $\frac{\varphi}{3} = 1^0\,59'\,60''$ ist,
so folgt der Fehler $F = 0^0\,0'\,12''$ im Gradmasse.

Man sieht also, dass diese Methode bei gewöhnlichen Zeichnungen höchstens bei einem Winkel von 15^0 angewendet werden kann. Wird aber der gegebene Winkel zuerst halbirt oder geviertelt, so kann sie auch bei grösserem Winkel ohne erheblichen Fehler angewendet werden. Diess wird nun auf folgende Art geschehen müssen.

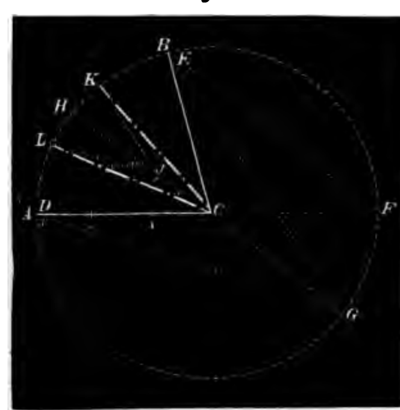
Fig. 45.

Man trage eine beliebige Einheit $C1$ (Fig. 45) auf jedem der 2 Schenkeln dreimal auf, verlängere AC über C hinaus, beschreibe aus C mit $C3$ einen Bogen, schneide zugleich die Verlängerung der AC in D ein, so

dass $CD = AC$ wird, und führe durch die Punkte 1 und 1′ Parallele zu $DIII$ bis der Bogen in I und II geschnitten wird, wodurch man $AI = III = IIIII$ näherungsweise erhält.

Viel richtigeres Resultat erzielt man, wenn man den gegebenen Winkel zuerst in vier gleiche Theile theilt, wobei sich folgendes Verfahren ergibt. Man trage auf dem einen Schenkel AC (Fig. 46) eine beliebige Einheit $C1$ dreimal auf und beschreibe mit $C3$ (oder CD) einen Kreis; verlängere dann einen Schenkel CD über C hinaus bis zu der Peripherie d. i. bis F, verbinde E mit F und halbire den gegebenen Winkel, indem man durch den Scheitelpunkt C zu EF eine Parallele zieht. Wird endlich auf der Halbirungslinie das Stück $CJ = C1$ gemacht, G mit E und D durch Gerade verbunden, und zu GD und GE durch J eine Parallele bis zu dem Bogen gezogen, so wird dieser näherungsweise in drei gleiche Theile getheilt, so dass $DL = LK = KE$ ist.


Fig. 46.



Durch Rechnung wird der Winkel $LCK = \frac{1}{3}AB$ folgender Weise bestimmt. Es ist $JL \parallel DG$, folglich ist der Winkel $LJH = DGH$ und da $\sphericalangle DGH = \frac{1}{2}DCH$, so ist auch $\sphericalangle LJH = \frac{1}{2}DCH = \frac{1}{4}ACB$.

Setzen wir nun den $\sphericalangle ACB = 60^\circ$, so ist $\sphericalangle LJH = 15^\circ$, und der Ergänzungswinkel zu 180° d. i. $\sphericalangle LJC = 180 - 15 = 165^\circ$. Da also in dem Dreiecke LJC die zwei Seiten $LC = 1$ und $JC = \frac{1}{3}$ ferner der der grösseren Seite gegenüberliegende Winkel bekannt sind, so können wir auch die übrigen Stücke, folglich auch den Winkel $LCJ = \frac{1}{6}ACB$ finden. Bezeichnen wir nun den zu suchenden Winkel LCJ mit x, den Winkel JLC mit y und den dritten Winkel mit z, so hat man:

$$JC : LC = \sin y : \sin z$$

oder $$\frac{1}{3} : 1 = \sin y : \sin 165^\circ,$$

woraus $$\sin y = \sin 165^\circ \times 0{\cdot}3333333$$
$$= \sin 15^\circ \times 0{\cdot}3333333;$$

nun ist $\log \sin 15^0 = 9{\cdot}4129962 - 10$
und $\log 0{\cdot}3333333 = 0{\cdot}5228787 - 1$, welches addirt,
gibt $9{\cdot}9358749 - 11$,
daher $\log \sin y = 8{\cdot}9358749 - 10.$
Diesem entspricht $4^0\,56'\,57''$
also ist $y = 4^0\,56'\,57''$;
da aber
$\measuredangle LJH$ oder $\alpha = x + y$ ist,
so folgt $x = \alpha - y = 15^0 - 4^0\,56'\,57''$

$$= \begin{cases} 14^0\,59'\,60'' \\ \ \ 4^0\,56'\,57'' \end{cases}$$

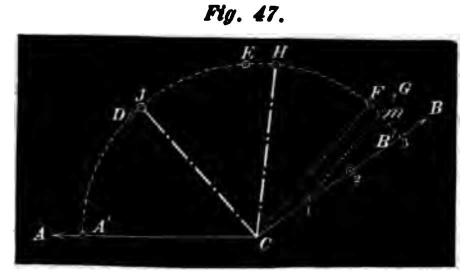
$$x = 10^0\ \ 3'\ \ 3''$$

Es ist also der Winkel x um $3'3''$ zu gross wie zuvor.

Wird der gegebene Winkel zuerst in acht gleiche Theile getheilt, so kann jeder solcher unter 90^0 auf Sekunden und jeder über 90^0 auf Minuten genau gedrittelt werden.

Man kann aber den gegebenen Bogen und Winkel auf Sekunden genau eintheilen, wenn er auch nahe an 180^0 oder auch darüber ist, indem man hierbei auf folgende Weise verfährt:

Fig. 47.



Man trage auf dem Schenkel des gegebenen Winkels hier (Fig. 47) auf BC eine beliebige Einheit $C1$ dreimal auf, beschreibe mit dem Radius gleich drei solchen Einheiten einen Bogen, nehme auf diesem ein Bogenstück z. B. $A'D$ nach dem Augenmasse als Drittel an, trage es dreimal auf, wodurch man hier den Bogenrest $F3$ erhält; wird nun durch den Punkt 1 die $G1 \parallel CF$ gezogen, so ist $Em = \frac{1}{3} AB$ praktisch genau.

Es ist wohl leicht begreiflich, dass diese Genauigkeit von dem Reste abhängig ist, denn je kleiner dieser ist desto grösser ist die Genauigkeit.

Bei diesen Verfahren hat man wohl drei Fälle zu unterscheiden; denn entweder ist das angenommene Drittel gleich dem wahren (was bei grossen Winkeln selbst der geübteste Zeichner nur höchst selten trifft), oder es ist grösser oder kleiner. So wie man

nun bei dem Bogenreste verfährt, eben so wird man auch beim Überschusse verfahren.

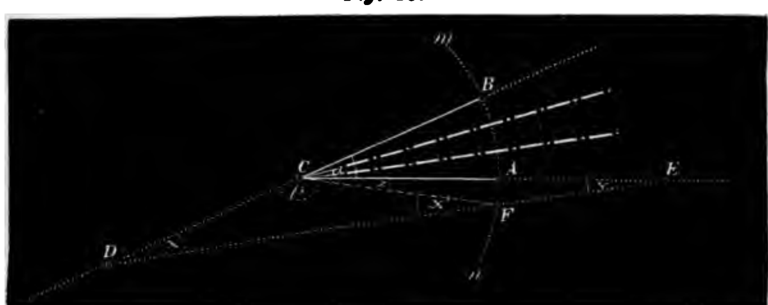
Anmerkung. Sollte der Bogen schon gegeben sein, so ist es immer vortheilhafter eine beliebige Einheit anzunehmen, selbe dreimal aufzutragen und einen besonderen Bogen zu verzeichnen, weil man dadurch schneller zum Ziele kommt, viel weniger Fehler begeht, und den zu theilenden Bogen rein erhält. Obgleich nun dieses Verfahren nichts Neues ist, so hielten wir es doch für nothwendig, solches durchzuführen, um zu zeigen, in wiefern man sich auf dieses Verfahren verlassen kann.

VII. Trisections-Methode

bei sehr kleinen Winkeln anwendbar.

Soll irgend ein Winkel z. B. der Winkel ACB (Fig. 48) gedrittelt werden, so verfahre man folgender Massen: Man beschreibe aus dem Scheitelpunkte C mit einem beliebigen Halbmesser AC den Bogen AB, verlängere dann den einen Schenkel BC über C,

Fig. 48.



und den andern Schenkel AC über A hinaus, mache ferner jede dieser Verlängerungen gleich dem Halbmesser, mit dem der Bogen AB beschrieben wurde, so dass $AE = CD = BC$ ist, und verbinde den so erhaltenen Punkt E mit D, wodurch auf dem Bogen FB das Stück $AF = \frac{1}{3} AB$ abgeschnitten wird.

Wir wollen nun sogleich untersuchen, in wiefern dieses Verfahren richtig ist. Setzen wir den Halbmesser $AC = CD = 1$, so ist $CE = 2$; bezeichnen wir ferner den gegebenen Winkel ACB mit α, dessen Ergänzungswinkel zu $2R$, d. i. DCA mit β und setzen der Kürze wegen $CDF = x$, $CED = y$ und $ECF = z$, so können wir aus diesen Daten die Winkel x, y und z bestimmen; indem wir in dem Dreiecke CDE die zwei Seiten CD, CE wie auch den von ihnen eingeschlossenen Winkel bekannt haben;

und ist der Winkel y gefunden, so haben wir in dem Dreiecke CEF die zwei Seiten CF, CE und den der CF gegenüberliegenden Winkel y bekannt.

Nehmen wir nun an den Winkel

$$\alpha = 15^0,$$

so ist $\beta = 180^0 - 15^0 = 165^0$, daher nach der bekannten Formel

$$\begin{aligned}
\operatorname{tang} \frac{x-y}{2} &= \operatorname{tang} \frac{x+y}{2} \cdot \frac{CE-CD}{CE+CD} \\
&= \operatorname{cotang} \frac{\beta}{2} \cdot \frac{CE-CD}{CE+CD} \\
&= \operatorname{tang} 7^0\,30' \cdot \tfrac{1}{3} \\
&= \operatorname{tang} 7^0\,30' \cdot 0{\cdot}3333333
\end{aligned}$$

und $\log \operatorname{tang} \frac{x-y}{2} = \log \operatorname{tang} 7^0\,30' + \log 0{\cdot}3333333$;

nun ist $\log \operatorname{tang} 7^0\,30' = 9{\cdot}1194291 - 10$

und $\log 0{\cdot}3333333 = 0{\cdot}5228787 - 1$;

daher $\log \operatorname{tang} \frac{x-y}{2} = 9{\cdot}6423078 - 11$

oder $= 8{\cdot}6423078 - 10$;

diesem entspricht $2^0\,30'\,45{\cdot}9''$

also ist $\frac{x-y}{2} = 2^0\,30'\,45{\cdot}9''$

daher $x - y = 5^0\,1'\,31{\cdot}8''$.

Da nun $x + y = 14^0\,59'\,60''$ ist,

und $x - y = 5\;\;1\;\;31{\cdot}8$ gefunden wurde,

so folgt: $2y = 9^0\,58'\,28{\cdot}2''$

also $y = 4^0\,59'\,14{\cdot}1''$.

Vergleicht man nun diesen Werth mit dem wahren Werth von $\frac{\alpha}{3}$, so finden wir durch Subtraction, da der wahre Werth von

$$\frac{\alpha}{3} = 4^0\,59'\,60''$$

und der gefundene $y = 4\;\;59\;\;14{\cdot}1$ ist,

dass der Unterschied $= 0^0\;\;0'\,45{\cdot}9''$ ist.

Da nun $CD = CF$ ist,

so ist $x' = x$,

und da $x' = y + z$ ist,

so folgt $z = x' - y = 9^0\,59'\,45{\cdot}9''$,

wovon $4\;\;59\;\;14{\cdot}1$ abgezogen,

gibt $z = 5^0\;\;0'\,31{\cdot}8''$.

Es ist daher der Winkel y um 45·9″ zu klein und der Winkel z um 31·8″ zu gross.

Ausserdem, dass der Winkel z einen geringeren Fehler gibt als der Winkel y, ist es auch vortheilhafter denselben als Drittel anzunehmen, weil man sonst beim Winkel y erst den Bogen beschreiben müsste, um auf demselben die Sehne abzunehmen.

Setzt man $\alpha = 30^0$, so findet man

$$y = 9^0 53' 46''$$
$$x = 20^0 \ 6' 14''$$

und $$z = 10^0 12' 28''.$$

Da nun der wahre Werth von

$$\frac{\alpha}{3} = 9^0 59' 60''$$

und $$y = 9 \ 53 \ 46 \text{ ist,}$$

so ist der Unterschied $$= 0^0 \ 6' 14'';$$

da ferner $$\frac{\alpha}{3} = 10^0 \text{ ist,}$$

und $$z = 10 \ 12' 28'' \text{ gefunden wurde,}$$

so folgt $$\frac{\alpha}{3} - z = 0^0 12' 28''.$$

Es ist daher der Winkel y um 6′ 14″ zu klein und der Winkel z um 12′ 28″ zu gross.

Setzt man $\alpha = 45^0$, so findet man

$$y = 14^0 38' 20''$$
$$x = 30^0 21' 40''$$

und $$z = 15^0 43' 20''.$$

Da nun der wahre Werth $\frac{\alpha}{3} = 15^0$ ist, so ist das eine gefundene Drittel, d. i. $y = 14^0 38' 20''$ nach den Construction um 21′ 40″ zu klein und das andere d. i. $z = 15^0 43' 20$ um 43′ 20″ zu gross.

Man sieht also daraus, dass man diese Methode nur bei kleinen Winkeln anwenden kann, wenn man auf Sekunden genau arbeiten will.

Da wir später den Winkel von 22° 30′ brauchen werden, so wollen wir auch bei diesem den Fehler wissen.

Sei also $\alpha = 22^0 30'$, so ist

$$y = 7^0 27' 24''$$
$$x = 15^0 \ 2' 36''$$
$$z = 7^0 35' 12''.$$

Da nun $\frac{\alpha}{3} = 7^0\,30'$ ist, so hat man,

da $\frac{\alpha}{3} = 7^0\,29'\,60''$ gesetzt werden kann,

und $y = 7^0\,27'\,24''$ gefunden wurde,

$$\frac{\alpha}{3} - y = 0^0\;\;2'\,36'',$$

also ist y um $2'\,36''$ zu klein;

da ferner $z = 7^0\,35'\,12''$ gefunden wurde,

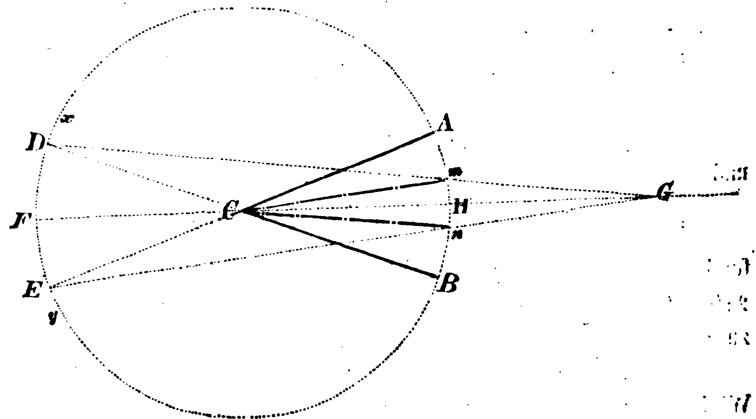
und $\frac{\alpha}{3} = 7^0\,30'\;\;0''$ ist,

so folgt $z - \frac{\alpha}{3} = 0^0\;\;5'\,12''$, also z um $5'\,12''$ zu gross.

Wollte man nach dieser Methode genauer arbeiten, so muss der gegebene Winkel zuerst halbirt werden, wobei sich auch der Vortheil ergibt, dass man die Theilungspunkte an der gehörigen Stelle erhält, und nicht den Bogen erst aufzutragen braucht, wie wir diess sogleich sehen werden.

Es sei ACB (Fig. 49) der zu theilende Winkel; man ergänze den gegebenen Bogen zu einem Kreise, verlängere die gege-

Fig. 49.



benen Schenkel über den Scheitelpunkt hinaus bis die Peripherie in D und E geschnitten wird, halbire vermittelst der Punkte A und D oder B und E den gegebenen Winkel, verlängere die Halbirungslinie so, dass die Verlängerung $GH = CH$ wird, und verbinde den so erhaltenen Punkt G mit D und E durch Gerade, wodurch $Am = mn = Bn = \frac{1}{3}AB$ näherungsweise erhalten wird.

Auf diese Art wird

bei einem Winkel von 30° der Fehler $F = 0° \; 0' 31{\cdot}8''$

„ „ „ „ 60° „ „ $F_1 = 0° \; 12' \; 28''$

„ „ „ „ 90° „ „ $F_2 = 0° \; 43' \; 20''$ sein,

wenn der Winkel x, hier mCn, genommen wird.

Wird hingegen der Winkel y, hier CGN, genommen, so ist

bei einem Winkel von 30° der Fehler $F = 0° \; 0' 45{\cdot}9''$

„ „ „ „ 60° „ „ $F_1 = 0° \; 6' \; 14''$

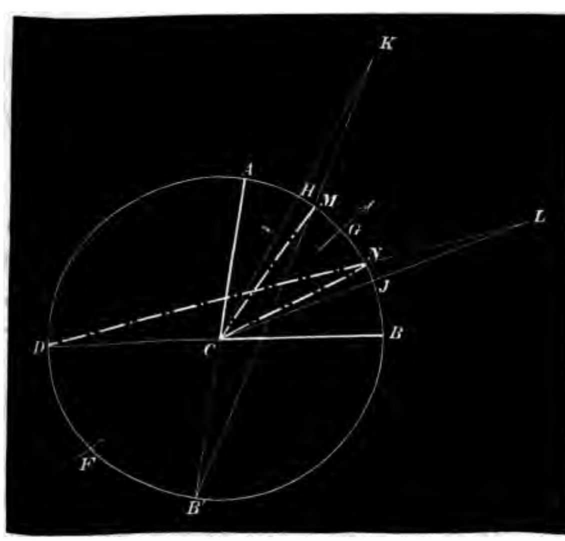
„ „ „ „ 90° „ „ $F_2 = 0° \; 21' \; 40''$ u. s. w.

Viel richtiger wird die Construction, wenn der gegebene Winkel zuerst geviertelt wird, und da wir die Viertheilung nach unserer Art sehr leicht vornehmen können, so kann vermittelst derselben die Dreitheilung für einen jeden beliebigen Winkel bis 90° fast auf Secunden genau verrichtet werden, indem jedes Viertel unter 90° kleiner ist als 22° 30′, da $90 : 4 = 22\frac{1}{2}$ ist, und bei einem Winkel von 22° 30′ nach diesem Verfahren ein Fehler von 2 oder 5 Minuten begangen wird, je nachdem man den Winkel y oder x nimmt, ohne den gegebenen Winkel zu halbiren.

Ist nun der Winkel ACB (Fig. 50) in drei gleiche Theile zu theilen, so verfahre man folgender Massen:



Fig. 50.



Man beschreibe aus dem Scheitelpunkte C mit einem beliebigen Radius einen Kreis, verlängere die beiden Schenkel über den Scheitelpunkt C hinaus, bis die Peripherie in D und B' geschnitten wird, theile den Bogen AB, vermittelst der Punkte A und D in zwei, und die so erhaltene Hälfte AG, vermittelst der Punkte A und F, abermals in zwei

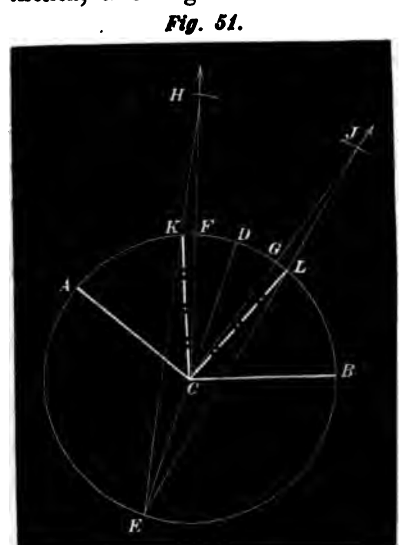
gleiche Theile; verlängere dann die Viertellinie CH und CJ über die Peripherie hinaus, so dass $HK = JL = HC$ wird, und verbinde zuletzt die so erhaltenen Punkte K und L mit D und B' durch Gerade, wodurch arc $AM = MN = NB = \frac{1}{3} AB$ erfolgt.

Denn es ist arc $AH = \frac{1}{4} AB$, und arc $HM = \frac{1}{3}$ von $\frac{1}{4}$ von AB, also $= \frac{1}{12} AB$, indem

$$\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{12} = \frac{3+1}{12} = \tfrac{4}{12} = \tfrac{1}{3}. \text{ ist.}$$

Wollte man nach diesem Verfahren noch genauer arbeiten, so müsste man den gegebenen Winkel zuerst in 8 gleiche Theile theilen, also folgender Massen verfahren:

Fig. 51.



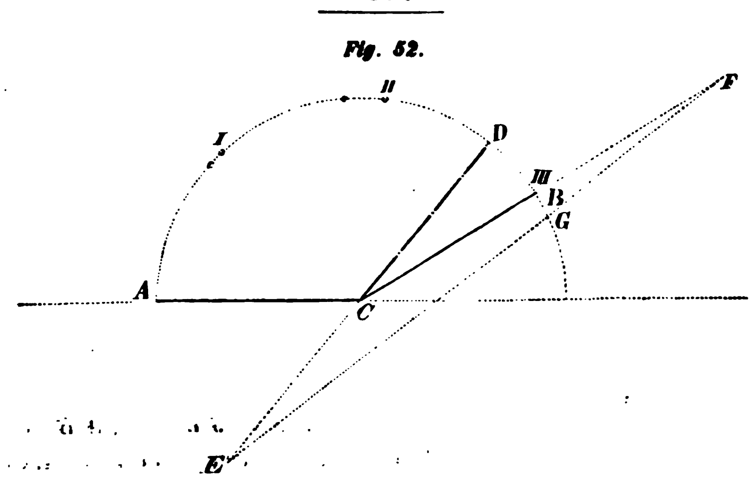
Man halbire den gegebenen Winkel ACB (Fig. 51), und verlängere die Halbirungslinie CD bis E, mache $DF = DG = \frac{1}{8} AB$, verlängere CF und CG über die Peripherie hinaus, schneide $FH = GJ = CF$ ab, d. h. gleich dem Halbmesser, mit dem der Bogen oder Kreis beschrieben wurde, und verbinde die so erhaltenen Punkte J und H mit E, wodurch arc $AK = KL = LB = \frac{1}{3} AB$, also auch der Winkel $ACK = KCL = LCB = \frac{1}{3} ACB$ erfolgt.

Ist nun der zu theilende Winkel $ACB = a = 120^{0}$, so wird der Fehler bei der Dreitheilung derjenige sein, der bei einem Achtel des gegebenen Winkels begangen wird, also $= 31{\cdot}8$ Secunden u. s. w., weil $120 : 8 = 15^{0}$ ist, und bei einem Winkel von 15^{0} der Fehler $= 0^{0}\,0'\,31{\cdot}8''$ begangen wird.

Nach dieser Methode kann man jeden beliebigen Winkel bis 180^{0} folgender Massen dritteln:

Man nehme auf dem zu theilenden Bogen AB (Fig. 52) ein beliebiges Stück als Drittel an und trage solches auf AB dreimal auf, wodurch man den Punkt D, und den Bogenrest BD erhält. Wird ferner von diesem Reste nach dem angegebenen Verfahren

Fig. 52.



der dritte Theil gesucht, also $BG = \frac{1}{3} BD$ gemacht und zu dem früher angenommenen Drittel hinzugefügt, so erhält man $AI = III = IIB = \frac{1}{3} AB$ sicherlich auf Secunden genau, wenn das zuerst angenommene Drittel nicht zu klein ist.

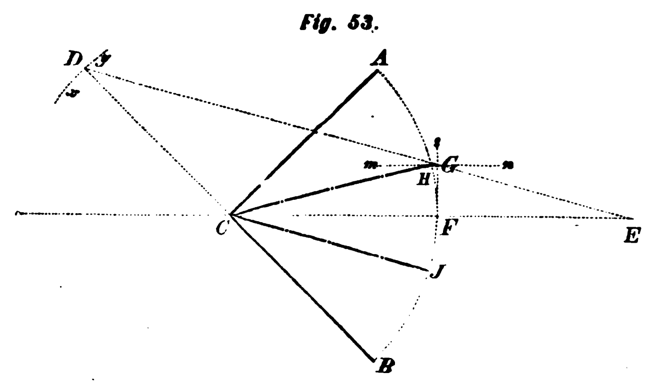
Bei diesem Verfahren wird man drei Fälle haben: denn entweder ist das angenommene Drittel = dem wahren (was übrigens selbst bei dem geübtesten Zeichner nur höchst selten der Fall ist), oder es ist der angenommene Theil grösser oder kleiner als das wahre Drittel. Ist es also kleiner, so verfahre man bei dem Bogenreste wie eben gezeigt wurde; ist es aber grösser, so erhält man einen Überschussbogen, wo dann von demselben das Drittel gesucht und von dem angenommenen Drittel abgezogen wird, wodurch man das fragliche Drittel erhält.

VIII. Trisections-Methode.

Wie wir aus der vorhergehenden Methode gesehen haben, ist y zu klein und z zu gross, um nun einen mittleren Fehler aufzufinden, werden wir hierbei auf folgende Art verfahren:

Es sei ACB (Fig. 53) der zu theilende Winkel; man halbire den gegebenen Winkel (indem man BC verlängert, $CD = BC$ macht und zu der hier nur gedachten Geraden AD durch C die CE parallel zieht), mache $EF = CF$, verbinde den Punkt E mit D durch eine Gerade, errichte in F die $Fs \perp CE$, welche die DE in G schneidet, und führe dann durch G die $mn \parallel CE$, wodurch man $AH = \frac{1}{3} AB$ erhält. Wird alsdann AH auf AB dreimal

Fig. 53.



aufgetragen, so erhält man arc $AH = HJ = JB = \frac{1}{3} AB$, und wenn die Punkte H, J mit C verbunden werden $\measuredangle ACH = HCJ = JCB = \frac{1}{3} ACB$.

Um die Richtigkeit dieses Verfahrens durch Rechnung zu begründen, brauchen wir nur die Tangente des Winkels FEG mit dem Sinus des wahren Drittels zu vergleichen, indem durch G die $mn \parallel CE$ gezogen den Punkt H bestimmt, und die Tangente des Winkels $FEG =$ sein soll dem Sinus des wahren Drittels von dem Winkel ACF.

Setzen wir nun den Winkel

$$ACB = 30^0,$$

so ist $\measuredangle ACF = 15^0$

und $\measuredangle FEG = y = 4^0\,59'\,14{\cdot}1''$, nach Fig. 48, S. 62;

da nun $EF = CF = 1$ ist,

so hat man $FG = EF \operatorname{tang} FEG = \operatorname{tang} 4^0\,59'\,14{\cdot}1''$,

daher $\log FG = \log \operatorname{tang} 4^0\,59'\,14{\cdot}1''$;

nun ist

$$\log \operatorname{tang} 4^0\,59'\,14{\cdot}1'' = 8{\cdot}9408372 - 10.$$

Da also $mn \parallel CE$, somit die Tangente des Winkels $FEG =$ ist dem Sinus des Winkels FCG für einen und denselben Halbmesser, so kann man sagen

$$\log \sin FCG = 8{\cdot}9408372 - 10.$$

Diesem entspricht $5^0\,0'\,22''$;

also ist der mittelst der Parallelen mn abgeschnittene Bogen $FH = 5^0\,0'\,22''$; daher genauer als die früheren Resultate. Bestimmt man aus dem obigen den Logarithmus für FG und sucht hiezu die entsprechende Zahl, so hat man

$$\log FG = 0{\cdot}9408373 - 2;$$

diesem entspricht $0{\cdot}08726442$,

also ist $FG = 0{\cdot}08726442$.

Vergleicht man diesen Werth mit dem in unserer Rechnung für 5^0 stehenden Werthe, so findet man, dass derselbe bis auf die 5. Decimalstelle ganz übereinstimmt.

Setzen wir den Winkel

$$ACB = \alpha = 60^0,$$

so ist $\measuredangle ACF = \frac{\alpha}{2} = 30^0$,

für welchen Fall $\measuredangle FEG = y = 9^0\,53'\,46''$

und $FG = \text{tang}\,9^0\,53'\,46''$ sein wird;

daher ist $\log FG = \log\text{tang}\,9^0\,53'\,46''$,

also auch $\log\sin FCG = \log\text{tang}\,9^0\,53'\,46''$;

nun ist $\log\text{tang}\,9^0\,53'\,46'' = 9{\cdot}2411185 - 10$

$\log\sin FCG = 9{\cdot}2416908 - 11$.

Diesem entspricht $10^0\,2'\,46{\cdot}2''$,

also ist $\sin FCG = 10^0\,2'\,46{\cdot}2''$.

Daher ist der gefundene Bogen um $2'\,46{\cdot}2''$ zu gross, und zwar bedeutend richtiger als nach dem früheren Verfahren.

Setzen wir den Winkel

$$ACB = \alpha = 90^0,$$

so ist $\measuredangle ACF = \frac{\alpha}{2} = 45^0$,

für welchen Fall $\measuredangle FEG = y = 14^0\,38'\,20''$ ist,

daher $FG = \text{tang}\,14^0\,38'\,20''$

und $\log FG = \log\text{tang}\,14^0\,38'\,20''$;

also ist $\log\text{tang}\,14^0\,38'\,20'' = 9{\cdot}4168099 - 10$

und $\sin FCG = 9{\cdot}4169821 - 10$.

Diesem entspricht $15^0\,8'\,29{\cdot}7''$,

daher ist $\sin FCG = 15^0\,8'\,29{\cdot}7''$,

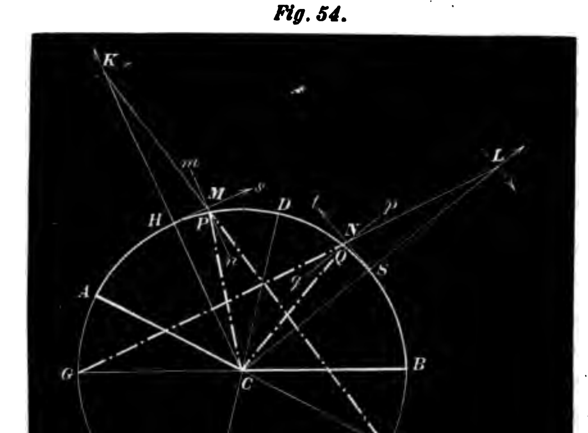
also um $8'\,29{\cdot}7''$ zu gross.

Wird nun auch bei diesem Verfahren der gegebene Winkel zuerst geviertelt oder geachtelt, so kann man sicherlich jeden beliebigen Winkel bis 180^0 auf Secunden genau dritteln. Man wird also hierbei auf folgende Art verfahren:

Man beschreibe mit einem beliebigen Radius AC (Fig. 54) einen Kreis und verlängere die beiden Schenkel über den Scheitel-

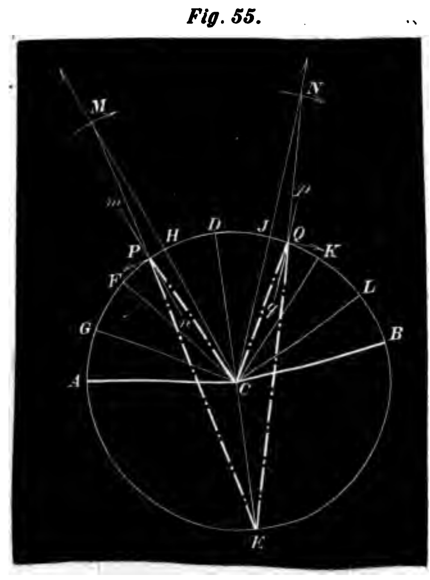
punkt hinaus bis zur Peripherie; halbire dann den gegebenen Winkel, verlängere die Halbirungslinie *CD* bis *E*, halbire dann vermittelst der Punkte *A*, *B*, *E* auch die halben Bogen *AD* und *BD*, ziehe die Viertellinie *CH* und *CS*, verlängere sie, so dass $HK = HC$, und ebenso $SL = SC$ wird; wird ferner der Punkt *K* mit *F* und der Punkt *L* mit *G* durch Gerade verbunden, in *H* die $Hs \perp CK$ und in *S* die $St \perp CL$ errichtet und durch die Durchschnittspunkte *M* und *N* die $mn \parallel CK$, so wie $pq \parallel CL$ gezogen, so erhält man die Punkte *P* und *Q*, wodurch $AP = PQ = QB = \frac{1}{3} AB$ erfolgt.

Fig. 54.



Ist der Winkel bedeutend über 90°, also nahe an 180°, z. B. der Winkel *ACB* (Fig. 55), so verfahre man auf folgende Art: Man suche zuerst die Halbirungslinie *CD* und verlängere sie bis *E*, suche dann die Viertellinien *CF*, *CK*, endlich auch die Achtellinien *CH*, *CJ*; verlängere beide so, dass jede Verlängerung gleich dem Halbmesser wird, verbinde die so auf den Verlängerungen erhaltenen Punkte mit dem Punkte *E*, errichte in *J* und *H* Senkrechte u. s. w. wie zuvor. Wie man aus der Zeichnung

Fig. 55.



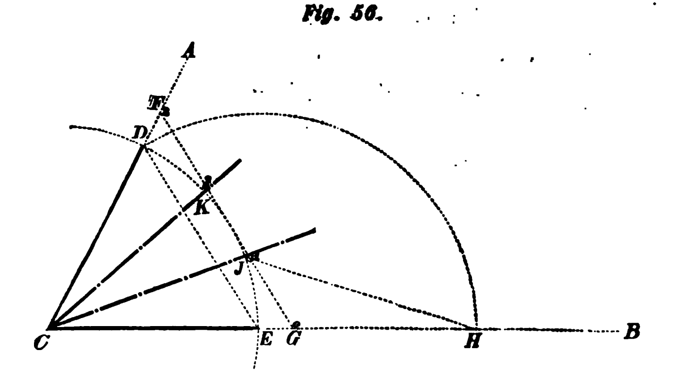
sieht, fallen die drei Punkte an *P* und *Q* so zusammen, dass man sie mit freien Augen kaum wahrnehmen kann; woraus folgt, dass die Senkrechten und Parallelen nur bei sehr grossen Zeichnungen angewendet zu werden brauchen.

IX. Trisections-Methode
mittelst der Tangente und Sehne.
Tangenten-Methode.

Dieses Verfahren wollen wir desshalb Tangenten-Methode nennen, weil wir jedesmal an den Halbirungspunkt des gegebenen Bogens zuerst eine Tangente ziehen müssen, mittelst deren wir dann die Trisection des gegebenen Winkels vornehmen.

Es sei *ACB* (Fig. 56) der zu theilende Winkel. Man beschreibe aus dessen Scheitelpunkte *C* mit einem beliebigen Radius

Fig. 56.



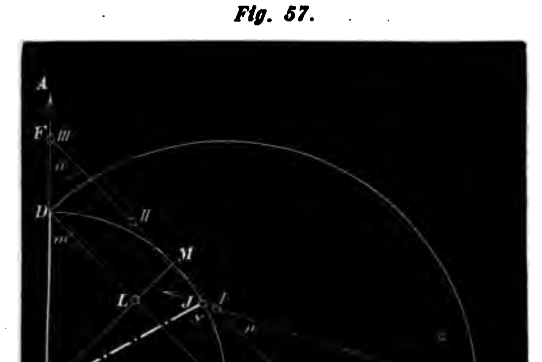
CD einen Bogen *DE*, ziehe die Sehne *ED* und zu dieser die Tangente *FG* parallel, welche natürlicherweise den gegebenen Bogen in dessen Halbirungspunkte berühren muss. Nun theile man diese von den Schenkeln des gegebenen Winkels begränzte Tangente in 3 gleiche Theile, lege sodann die Sehne *DE* um deren Endpunkt *E* in die Verlängerung des Schenkels *CE* um, indem man aus *E* mit *DE* einen Bogen bis *H* beschreibt, so dass $EH = DE$ wird. Wird endlich aus dem so erhaltenen Punkte *H* durch den ersten Theilungspunkt der Tangente *FG* eine Gerade bis zu dem Bogen *DE* geführt, so schneidet diese den gegebenen Bogen so, dass das Stück $EJ = \frac{1}{3} DE$ ist. Der nach diesem Verfahren erhaltene dritte Theil ist ebenfalls nur näherungsweise, allein für jeden beliebigen Winkel

bis 90° mit einer solchen Genauigkeit, als man sich dies beim praktischen Zeichnen nur wünschen kann.

Wir wollen nun die Richtigkeit dieses Verfahrens durch Rechnung begründen und sehen, inwieferne man sich auf diese Methode verlassen kann.

Nehmen wir an, der gegebene Winkel ACB (Fig. 57) sei $= 90^0$, und wir wollen nach abwärts rechnen; es sei also nach der gegebenen Construction $EH = DE$ gemacht, die Tangente FG in drei gleiche Theile getheilt, und aus H durch den ersten Theilungspunkt I eine Gerade bis J gezogen. Hier finden wir, dass DE, FG, GI, ferner die Winkel m, n, v bekannt sind, woraus sich dann der Winkel x, ferner ω und daraus auch der Winkel y finden lässt.

Fig. 57.



Setzen wir den Radius

$$CE = 1,$$

so ist $\quad DE = \sqrt{2} = 1{\cdot}41421356,$

da nun $\quad GM = FM$ die halbe Seite des umschriebenen Quadrates von dem mit dem Halbmesser $CM = CE$ beschrieben gedachten Kreise sein muss, so ist

$$MG = CE = 1,$$

also $\quad \overline{CM}^2 + \overline{GM}^2 = \overline{CG}^2$

oder $\quad 1^2 + 1^2 = \overline{CG}^2,$

woraus $\quad CG = \sqrt{2}$ folgt,

also ist auch $\quad CG = \sqrt{2} = 1{\cdot}41421356 = DE;$

da nun $CE = 1$, $CG = \sqrt{2}$ und $EH = DE = \sqrt{2}$,

ferner $\quad CH = CE + EH$ ist,

so folgt $\quad CH = 1 + \sqrt{2} = 2{\cdot}41421356;$

ebenso findet man auch GH und EG, denn es ist:

$$CG = \sqrt{2} = 1{\cdot}41421356$$

und $CE = 1$

also $CG - CE = EG = 1{\cdot}41421356 - 1 = 0{\cdot}41421356$

und $GH = EH - EG = 1{\cdot}41421356 - 0{\cdot}41421356 = 1.$

Da endlich der Winkel $ACB = 90^0$ ist, so ist $m = n = w + z = 45^0$, somit sind alle erforderlichen Stücke zur Berechnung des Werthes von x gefunden worden.

Um den Winkel z in dem Dreiecke GJH zu finden, haben wir die bekannte Formel

$$\operatorname{tang}\left(\frac{w-z}{2}\right) = \frac{GH - GI}{GH + GI} \operatorname{tang}\left(\frac{w+z}{2}\right) \text{ anzuwenden.}$$

Da nun $GH = 1$

und $GI = \frac{1}{3}$ von FG und $\frac{2}{3}$ von $(GM = 1)$ ist,

so haben wir $GI = \frac{2}{3} = 2:3 = 0{\cdot}666666\dot{6}\ldots$

da also $GH = 1$

und $GI = 0{\cdot}6666666$ ist,

so folgt $GH + GI = 1{\cdot}6666666$

und $GH - GI = 0.3333334;$

es ist ferner $\frac{n}{2} = \frac{w+z}{2} = \frac{45^0}{2} = 22^0\,30',$

somit durch Substitution in die betreffende Formel

$$\operatorname{tang}\frac{w-z}{2} = \frac{GH - GI}{GH + GI} \cdot \operatorname{tang}\frac{w+z}{2} = \frac{0{\cdot}3333334}{1{\cdot}6666666} \cdot \operatorname{tang} 22^0\,30$$

und

$$\log\operatorname{tang}\frac{w-z}{2} = \log 0{\cdot}3333334 + \log\operatorname{tang} 22^0 30' - \log 1{\cdot}6666666.$$

Nun ist: $\log\operatorname{tang} 22^0\,30' = 9{\cdot}6172243 - 10$ } welches addirt,

und $\log 0{\cdot}3333334 = 0{\cdot}5228788 - 1$

gibt $10{\cdot}1401031 - 11$

da ferner $\log 1{\cdot}6666666 = 0{\cdot}2218487$ ist,

so folgt $\log\operatorname{tang}\frac{w-z}{2} = 8{\cdot}9182544 - 10.$

Diesem entspricht $4^0\,44'\;8{\cdot}6'';$

es ist also $\frac{w-z}{2} = 4^0\,44'\;8{\cdot}''6,$

daher $w - z = 9^0\,28'\,17{\cdot}2''.$

Da nun $w + z = 44^0\,59'\,60''$ ist,

und $w - z = 9^0\,28'\,17{\cdot}2''$ gefunden wurde,

so folgt $2z = 35^0\,31'\,42{\cdot}8'',$

also $z = 17^0\,45'\,51{\cdot}4''.$

Um ferner den Winkel y zu finden, haben wir in dem Dreiecke CJH die Seiten CJ, CH und den Winkel $CHJ = z$, also zwei Seiten und den der kleineren Seite gegenüberliegenden Winkel gegeben, folglich können wir sagen:

$$CJ : CH = \sin z : \sin y,$$

woraus $\sin y = \frac{CH \sin z}{CJ}$ folgt;

und da $CJ = 1$ ist,

so folgt $\sin y = CH \sin z$

und durch Substitution der Werthe für CH und z, folgt

$$\sin y = 2{\cdot}41421356 \times \sin 17^\circ 45' 51{\cdot}4'',$$

daher $\log \sin y = \log 2{\cdot}41421356 + \log \sin 17^\circ 45' 51{\cdot}4''$;

nun ist $\log 2{\cdot}41421356 = 0{\cdot}3837755$

und

$\log \sin 17^\circ 45' 51{\cdot}4'' = 9{\cdot}4844445 - 10$

somit $\log \sin y = 9{\cdot}8672201 - 10.$

Diesem entspricht $47^\circ 26' 27{\cdot}3''$,

also ist $y = 47^\circ 26' 27{\cdot}3''$.

Da nun hier, wie man aus der Construction und den gegebenen Daten sieht, der Ergänzungswinkel zu 180° zu nehmen ist, so ist unser $\measuredangle = y' = 180^\circ - y$

also $y' = \begin{cases} + 179^\circ 59' 60'' \\ - \;\; 47 \;\; 26 \;\; 27{\cdot}3 \end{cases}$

somit $y' = 132^\circ 33' 32{\cdot}7''$

und da $z = 17 \;\; 45 \;\; 51{\cdot}4$,

so folgt $y' + z = 150^\circ 19' 24{\cdot}1''$ welche Summe von

$179 \;\; 59 \;\; 60$ 180° abgezogen,

gibt $x_a = 29^\circ 40' 35{\cdot}9''$

Da nun der wahre Werth von

$$x_w = 29^\circ 59' 60''$$

und der annähernde $x_a = 29^\circ 40' 35{\cdot}9''$ ist,

so ist der Fehler

$F = x_w - x_a = 0^\circ 19' 24{\cdot}1$, d. h. es ist der gefundene Winkel um 19 Minuten 24 Secunden zu klein.

Geben wir nun dem Winkel ACB irgend einen andern Werth, so ist die Auffindung der zur Berechnung der Winkel z und y nöthigen Bestimmungsstücke etwas schwieriger, allein doch noch immer ausführbar. Setzen wir also:

$\measuredangle ACB = 45^0$, so folgt, da $m = m' = n = n'$ ist,

$$\measuredangle m = n = 67^0 30'$$

und $\measuredangle \frac{ACB}{2} = 22^0 30'$,

daher $GM = CM \tang 22^0 30'$, und wegen $CM = 1$

$$GM = \tang 22^0 30'$$

und $\log \tang 22^0 30' = 9{\cdot}6172243 - 10$,

also $\log GM = 0{\cdot}6172243 - 1$.

Diesem entspricht $0{\cdot}41421347$,

daher ist $GM = 0{\cdot}41421347$.

Wird nun der für GM gefundene Werth durch 3 dividirt, und der Quotient mit 2 multiplicirt, so erhält man

$$\tfrac{2}{3} GM = \tfrac{1}{3} FG,$$

man hat also $0{\cdot}41421347 : 3 = 0{\cdot}13807115$,

welcher Quotient mit 2 multiplicirt gibt,

$$GI = 0{\cdot}2761423.$$

Um CG zu finden, haben wir

$$GM = CG \sin GCM,$$

woraus $CG = \frac{GM}{\sin GCM}$,

und $\log CG = \log GM - \log \sin GCM$,

worein die entsprechenden Werthe substituirt, gibt sofort:

$$\log CG = \log 0{\cdot}41421347 - \log \sin 22^0 30';$$

nun ist $\log 0{\cdot}41421347 = 9{\cdot}6172243 - 10$

und $\log \sin 22^0 30' = 9{\cdot}5828397 - 10$

daher $\log CG = 0{\cdot}0343846$.

Diesem entspricht $1{\cdot}08293$,

daher ist $CG = 1{\cdot}08293$.

Um EH zu finden, haben wir zuerst das EL zu suchen, und da auch hier das Dreieck ECL rechtwinkelig ist, so folgt:

$$EL = EC \sin GCM = \sin GCM = \sin 22^0 30',$$

daher $\log EL = \log \sin 22^0 30'$;

nun ist $\log \sin 22^0 30' = 9{\cdot}5828397 - 10$,

also $\log EL = 0{\cdot}5828397 - 1$.

Diesem entspricht $0{\cdot}3826834$;

es ist daher $EL = 0{\cdot}3826834$.

Da nun $EH = 2 EL$ ist,

so findet man durch Substitution

$$EH = 2EL = 2 \times 0{\cdot}3826834 = 0{\cdot}7653668,$$

also $EH = 0{\cdot}7653668.$

Eben so leicht wird auch GH gefunden, denn es ist

$$GH = EH - EG$$

und $EG = CG - CE = 1{\cdot}08239 - 1,$

somit $EG = 0{\cdot}08239,$

daher $GH = 0{\cdot}7653668 - 0{\cdot}08239,$

wovon $0{\cdot}08239$ abgezogen,

gibt $GH = 0{\cdot}6829768.$

Aus den so gefundenen Stücken können wir sofort mittelst der bekannten Formel:

$$\operatorname{tang}\left(\frac{w-z}{2}\right) = \frac{GH - GI}{GH + GI} \cdot \operatorname{tang}\left(\frac{w+z}{2}\right) = \frac{GH - GI}{GH + GI} \operatorname{cotang}\frac{v}{2}$$

den Winkel z finden.

Ist also $GH = 0{\cdot}6829768$

und $GI = 0{\cdot}2761423,$

so ist $GH + GI = 0{\cdot}9591191$

und $GH - GI = 0{\cdot}4068345;$

ferner ist $\measuredangle\, w + z = 67^{\circ}\,30',$

also $\measuredangle\, \frac{w+z}{2} = 33^{\circ}\,45';$

welche Werthe in die obige Formel substituirt, gibt sofort:

$$\operatorname{tang}\left(\frac{w-z}{2}\right) = \frac{0{\cdot}4068345}{0{\cdot}9591191} \times \operatorname{tang} 33^{\circ}\,45';$$

daher

$$\log\operatorname{tang}\left(\frac{w-z}{2}\right) = \log 0{\cdot}4068345 + \log\operatorname{tang} 33^{\circ}45' - \log 0{\cdot}9591191;$$

nun ist $\log\operatorname{tang} 33^{\circ}\,45' = 9{\cdot}8248926 - 10$ } welches

und $\log 0{\cdot}4068345 = 0{\cdot}6094178 - 1$ } addirt,

gibt $10{\cdot}4343104 - 11$, wovon

$\log 0{\cdot}9591191 = 0{\cdot}9818730 - 1$ abgezogen,

folgt $\log\operatorname{tang}\left(\frac{w-z}{2}\right) = 9{\cdot}4524374 - 10.$

Diesem entspricht $15^{\circ}\,49'\,26''.$

Also ist.

$$\operatorname{tang}\frac{w-z}{2} = 15^{\circ}\,49'\,26'',$$

somit $w - z = 31^{\circ}\,38'\,52''.$

Da nun $w + z = 66^0 89' 60''$

und $w - z = 31\ 38\ 52$ ist, so folgt durch

Subtraction $2z = 35^0 51' 8''$,

daher $z = 17^0 55' 34''$.

Nun können wir auch den Winkel y' finden, indem auch hier 2 Seiten und der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel gegeben ist, daher: $CJ : CH = \sin z : \sin y$,

woraus $\sin y = \frac{CH \sin z}{CJ}$ folgt,

und wegen $CJ = 1$,

hat man $\sin y = CH \sin z$.

Substituirt man in diesem Ausdrucke die gefundenen Werthe für CH und z, so folgt

$$\sin y = 1{\cdot}7653668 \sin 17^0 55' 34'',$$

daher $\log \sin y = \log 1{\cdot}7653668 + \log \sin 17^0 55' 34''$;

nun ist $\log 1{\cdot}7653668 = 0{\cdot}2468349$

und $\log \sin 17^0 55' 34'' = 9{\cdot}4880335 - 10$,

daher $\log \sin y = 9{\cdot}7350864 - 10$.

Diesem entspricht $32^0 54' 45''$,

also ist $y = 32^0 54' 45''$, d. h. ein spitziger Winkel. Allein aus der näheren Betrachtung der gegebenen Daten und des Dreieckes CJH folgt, dass man den Nebenwinkel zu nehmen hat, also muss das gefundene y von $2R$ abgezogen werden, somit

da $2R = 179^0 59' 60''$ ist,

und $y = 32\ 54\ 45$ gefunden wurde,

folgt $2R - y = 147^0\ 5' 15''$,

also $y' = 147^0\ 5' 15''$,

und da $z = 17\ 55\ 34$,

so ist $z + y' = 165^0\ 0' 49''$,

und wenn dieser Werth von $2R$ abgezogen wird, so erhält man x;

also da $2R = 179^0 59' 60''$

und $z + y' = 165\ 0\ 49''$ ist,

folgt $2R - (z + y') = 14^0 59' 11'' = x_a =$ dem gesuchten Winkel annäherungsweise.

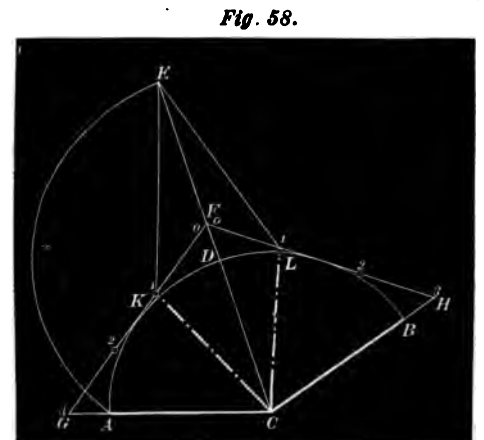
Da also der wahre Werth des $\measuredangle x_w = 14^0 59' 60''$

und der gefundene annähernde $\measuredangle x_a = 14\ 59\ 11$ ist,

so ist der Fehler $F = x_w - x_a = 0^0\ 0' 49''$, d. h., es ist der nach dieser Construction gefundene Winkel um $49''$ zu klein.

Wird der Winkel $ACB = 22^{0}30'$, d. i. $= \frac{R}{4}$ genommen, so findet man auf die vorgezeichnete Weise, dass der Fehler ebenfalls nur Secunden beträgt. Somit ist diese Methode als eine äusserst genaue anzusehen, so dass jeder Winkel, der über 90^{0}, also auch nahe an 180^{0} ist, auf Secunden genau gedrittelt werden kann, wenn man ihn zuerst viertelt, wie wir diess sogleich sehen werden.

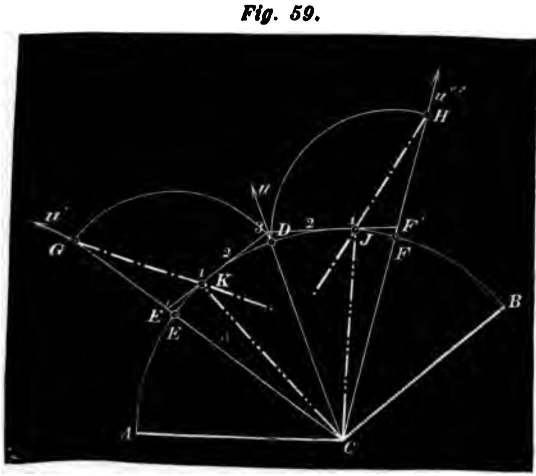
Fig. 58.



Es sei der Winkel ACB (Fig. 58) der zu theilende Winkel. Man ziehe in diesem die Halbirungslinie CD, verlängere sie über D hinaus, mache DE gleich der gedachten Sehne AD des halben Winkels, ziehe dann zu AD und BD die Tangenten FG und FH parallel, theile jede derselben in drei gleiche Theile und führe aus E durch die ersten Theilungspunkte zwei Gerade, so dass der Bogen in K und L geschnitten wird, wodurch arc $AK = KL = LB$ folgt; da hier der Winkel nahe an 180^{0} ist, so ist der Fehler gleich $\frac{1}{4}$ Grad.

Wollte man nun denselben Winkel genauer eintheilen, d. h. so dass der Fehler keine Minuten, also nur Secunden beträgt, so muss man den gegebenen Winkel zuerst in 4 gleiche Theile theilen und daher auf folgende Art verfahren.

Fig. 59.



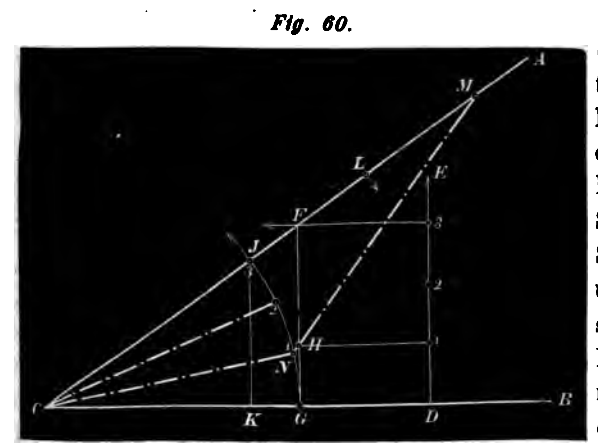
Man ziehe zuerst die Halbirungslinie CD (Fig. 59), sodann die Viertellinie CE und CF und verlängere jede derselben über den Bogen ADB hinaus; führe alsdann zu den gedachten Sehnen

DE und DF parallele Tangenten $E'3$ und $F'3$, theile jede derselben in 3 gleiche Theile, mache $FH = EG = ED = DF$ und führe aus den so erhaltenen Punkten G und H durch die ersten Theilungspunkte der Tangente Gerade bis zu dem Bogen ADB, wodurch arc $AK = KJ = JB = \frac{1}{3} AB$ erfolgt.

Auf diese Art kann man jeden beliebigen Winkel bis 180° in drei gleiche Theile theilen, so dass der Fehler nur Secunden beträgt.

Bei dieser Methode kommt, wie wir gesehen haben, nur das lästig vor, dass man die Tangente zuerst theilen muss, was allerdings sehr unangenehm ist; allein auch diesen Uebelstand kann man beseitigen, indem man auf folgende Art verfährt:

Fig. 60.



Es sei ACB (Fig. 60) der zu theilende Winkel. Man errichte in einem beliebigen Punkte D des einen Schenkels CB die Senkrechte DE, und trage auf dieser eine beliebige Einheit $D1$, dreimal auf; ziehe durch den dritten Theilungspunkt (3) die $F3 \parallel CB$ so lange bis der Schenkel CA in F geschnitten wird, fälle aus F die $FG \perp BC$ und ziehe durch 1 der DE die $H1 \parallel CB$ bis die FG in H geschnitten wird; beschreibe dann aus C mit CG den Bogen GJ, fälle aus J die $JK \perp BC$, trage JK auf AC von J aus zweimal auf, und führe aus dem so erhaltenen Punkte M durch H eine Gerade, bis der Bogen JG in N geschnitten wird, wodurch $GN = \frac{1}{3} JK$ mit derselben Genauigkeit wie zuvor erhalten wird.

Man sieht also, dass auf diese Art die Tangente FG sehr leicht in drei gleiche Theile getheilt wird. Die Parallele $H1$ wird gleichzeitig mit $F3$ gezogen, was jeder Praktiker ohnehin wissen wird.

Hierbei ist nur noch das zu bemerken, dass man jedesmal, indem man die Tangente zieht, zugleich auch den Berührungspunkt bestimmt, diesen mit dem Scheitelpunkte durch eine Gerade ver-

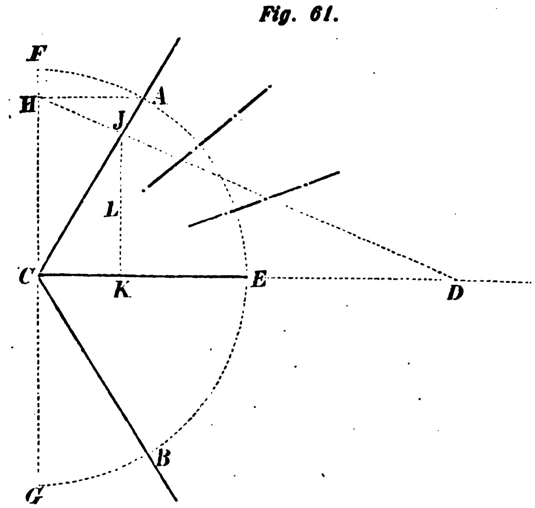
bindet und auf dieser jene Normale annimmt, worauf die drei Theile aufgetragen werden, mittelst welchen man die Tangente theilt; man wird also in diesem Falle für die Trisection einen andern Radius und Bogen haben als für die Bisection, allein dies hält doch nicht so lange auf als die gewöhnliche Eintheilung der betreffenden Tangenten.

X. Trisections-Methode.

Sinus-Methode.

Diese Methode wollen wir desshalb Sinus-Methode nennen, weil wir mittels des Sinus des Ergänzungswinkels zu 90° die Dreitheilung vornehmen.

Fig. 61.

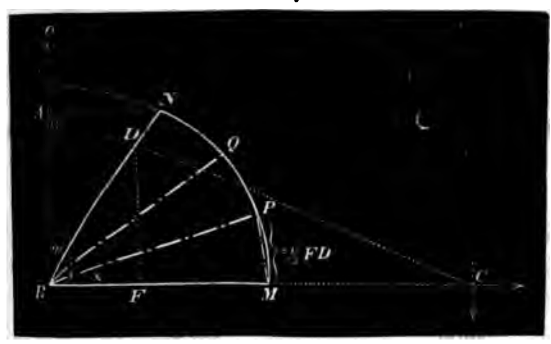


Es sei ACB (Fig. 61) der zu theilende Winkel, dessen Hälfte d. i. der Winkel ACE gedrittelt werden soll. Man verlängere CE über E hinaus, mache $ED = CE$, errichte im Scheitelpunkte C eine Senkrechte FG, fälle vom Punkte A die AH normal auf CF und verbinde den Punkt H mit D durch eine Gerade, welche den Schenkel AC in J schneidet, wird ferner von dem Punkte J die $JK \perp CE$ gezogen und halbirt, so lässt sich die Hälfte dieser Normalen, d. i. $\frac{JK}{2}$ auf dem Bogen AE dreimal auftragen mit einem sehr geringen Fehler.

Da diese Methode, wie man aus der Figur sieht, höchst einfach ist, so dürfte es nicht uninteressant sein, zu untersuchen, in wie ferne sie richtig ist.

Es sei (Fig. 62) der Winkel MBN, welchen wir der Kürze wegen mit φ bezeichnen wollen, nach dem gegebenen Verfahren in drei gleiche Theile getheilt, so dass arc $MP = \frac{1}{3} FD$ ist; bei welcher

Fig. 62.



Construction ferner $BM = 1$, $BC = 2$ gesetzt, der Winkel BAD mit α und der zu suchende d. i. $\frac{\varphi}{3}$ mit x bezeichnet wird.

Betrachten wir nun zuerst das rechtwinkelige 3eck ABC, so finden wir

$$BC = AB \operatorname{tang} \alpha,$$

woraus

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{BC}{AB}.$$

Da nun $BC = 2$ ist, nach der Construction, und $AB = \sin \varphi$ gesetzt werden kann, indem $AN \parallel BM$ ist, so hat man durch Substitution

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{\sin \varphi} \quad \ldots\ldots \text{ I)}$$

Betrachten wir jetzt das Dreieck ABD, so haben wir

$$\begin{aligned} \sphericalangle ADB &= 180^0 - [\alpha + (90 - \varphi)] \\ &= 180^0 - \alpha - 90 + \varphi \\ &= 90^0 - \alpha + \varphi \\ &= 90^0 - (\alpha - \varphi). \end{aligned}$$

Wir können somit folgende Proportion aufstellen:

$$AB : BD = \sin [90 - (\alpha - \varphi)] : \sin \varphi;$$

da nun $AB = \sin \varphi$

und $\sin [90 - (\alpha - \varphi)] = \cos (\alpha - \varphi)$ gesetzt werden kann, so folgt sofort

$$\sin \varphi : BD = \cos (\alpha - \varphi) : \sin \alpha,$$

woraus

$$BD = \frac{\sin \varphi \sin \alpha}{\cos (\alpha - \varphi)} \quad \ldots\ldots \text{ II)}$$

Aus der nähern Betrachtung des Dreieckes BDF folgt ferner

$$FD = BD \sin \varphi,$$

und da wir für BD den in II) gefundenen Werth setzen können, so folgt sofort

$$FD = \frac{\sin \varphi \sin \alpha}{\cos (\alpha - \varphi)} \sin \varphi = \frac{\sin^2 \varphi \sin \alpha}{\cos (\alpha - \varphi)} = \frac{\sin^2 \varphi \sin \alpha}{\cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha}$$

dividiren wir Zähler und Nenner mit $\sin\varphi \sin\alpha$, so erhalten wir

$$FD = \frac{\sin^2\varphi \sin\alpha : \sin\varphi \sin\alpha}{\frac{\cos\varphi \cos\alpha}{\sin\varphi \sin\alpha} + \frac{\sin\varphi \sin\alpha}{\sin\varphi \sin\alpha}} = \frac{\sin\varphi}{\frac{\cos\varphi \cos\alpha}{\sin\varphi \sin\alpha} + 1}.$$

Da nun $\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \operatorname{cotg}\varphi$, und $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{cotang}\alpha$ ist, so folgt durch Substitution

$$FD = \frac{\sin\varphi}{\operatorname{cotang}\varphi \operatorname{cotang}\alpha + 1};$$

drücken wir in diesem Ausdrucke die im Nenner vorkommende $\operatorname{cotang}\alpha$ durch die Tangente aus, so ist

$$FD = \frac{\sin\varphi}{\operatorname{cotang}\varphi \cdot \frac{1}{\operatorname{tang}\alpha} + 1} = \frac{\sin\varphi}{\frac{\operatorname{cotang}\varphi}{\operatorname{tang}\alpha} + 1}.$$

Da wir nun nach Formel I) $\operatorname{tang}\alpha = \frac{2}{\sin\varphi}$ haben, so hat man

$$FD = \frac{\sin\varphi}{\frac{\frac{\operatorname{cotang}\varphi}{2}}{\sin\varphi} + 1} = \frac{\sin\varphi}{\frac{\operatorname{cotang}\varphi \sin\varphi}{2} + 1} = \frac{\sin\varphi}{\frac{\operatorname{cotang}\varphi \sin\varphi + 2}{2}}$$

$$= \frac{2\sin\varphi}{\operatorname{cotang}\varphi \sin\varphi + 2}.$$

Setzen wir nun statt der $\operatorname{cotang}\varphi$ den reciproken Werth $\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$, so ist der obige Ausdruck sofort

$$= \frac{2\sin\varphi}{\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \sin\varphi + 2} = \frac{2\sin\varphi}{\cos\varphi + 2}.$$

Es ist also

$$FD = \frac{2\sin\varphi}{\cos\varphi + 2} \text{ und } \frac{FD}{2} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi + 2}.$$

Da wir aber $\frac{1}{2} FD = \operatorname{chord} x = 2\sin\frac{x}{2}$ gesetzt haben, so hat man ferner

$$2\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sin\varphi}{\cos\varphi + 2} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi + 2},$$

woraus

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{\sin\varphi}{2(\cos\varphi + 2)} \quad \ldots\ldots\ldots \text{III)}$$

Mittels dieser Formel können wir, da sie sich logarithmisch behandeln lässt, jeden Werth für unser $\frac{\varphi}{3} = x$ berechnen, um zu sehen, in wie ferne unsere Construction richtig ist.

Setzen wir nun $\varphi = 45^0$, so haben wir

$$\cos\varphi = 0{\cdot}7071068$$

ferner $2 = 2$

somit $\cos\varphi + 2 = 2{\cdot}7071068$;

nun ist $\log\sin\varphi = 9{\cdot}8494850 - 10$

$$\left.\begin{array}{r} \log 2 = 0{\cdot}3010300 \\ \log 2{\cdot}7071068 = 0{\cdot}4325054 \end{array}\right\}, \text{ welches addirt, gibt}$$

$$0{\cdot}7335354;$$

da also $\log\sin\varphi = 9{\cdot}8494850 - 10$

und $\log 2 + \log\cos(\varphi + 2) = 0{\cdot}7335354$ ist,

so folgt $\log\sin\frac{x}{2} = 9{\cdot}1159496 - 10.$

Diesem entspricht $7^0\,30'\,15''$;

also ist $\frac{x}{2} = 7^0\,30'\,15''$,

daher $x = 15^0\;0'\,30''$;

da nun $\frac{\varphi}{3} = \frac{45^0}{3} = 15^0$ ist,

so ist der Fehler $F = 0^0\,0'\,30''$ bei einem Winkel von 45^0.

Setzt man den Winkel $\varphi = 24^0$, so findet man mittels unserer Formel den Fehler $F = 0^0 0' 18{\cdot}4''$.

Bei einem Winkel von 60^0 ist der Fehler $F = 0^0\,3'\,6''$, und bei 90^0 ist $F = 1^0\,2'\,42''$.

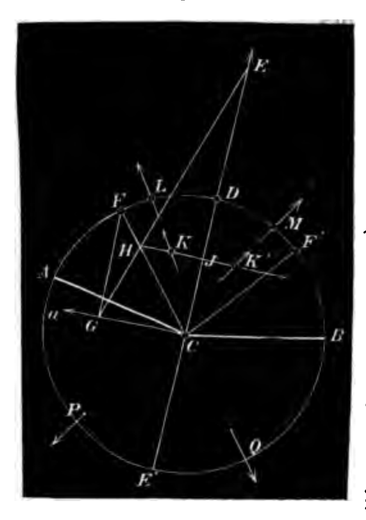
Man sieht also, dass der Fehler immer grösser und grösser wird, je grösser der Winkel ist, und dass der Fehler das Maximum dann erreicht, wenn $\varphi = 180^0$, wovon man sich sehr leicht überzeugen kann, wenn man das Maximum sucht.

Obgleich nun der Fehler bei 90^0 schon bedeutend ist, so ist diese Methode dennoch eine vorzügliche, da sie bei einem Winkel von 45^0 den Fehler nur $30''$ gibt. Wir können daher jeden Winkel bis 90^0 auf Secunden genau in drei gleiche Theile theilen, wenn wir selben zuerst halbiren; und ebenso kann jeder Winkel, der über 90^0 ist, also bis 180^0 reicht, auf Secunden genau gedrittelt werden, wenn man ihn zuerst viertelt.

Wie nun ein Winkel nach dieser Art zuerst halbirt und dann gedrittelt wird, haben wir bereits in der ersten Figur dieser Methode gesehen, was eigentlich nur bei einem Winkel unter 90^0 geschehen soll. Ist aber der Winkel über 90^0 z. B. der Winkel



Fig. 63.



ACB (Fig. 63), so theile man denselben zuerst in vier gleiche Theile, ziehe die drei Theilungslinien ***CF***, ***CD***, ***CF'***, verlängere ***CD*** über ***D*** hinaus, so dass ***DE*** = ***CD*** wird, führe dann durch ***C*** die ***Cu*** normal auf ***CD*** und aus ***F*** die ***FG*** ⊥ ***Cu***, und verbinde ***G*** mit ***E*** durch eine Gerade, welche den Radius ***CF*** in ***H*** schneidet. Wird endlich aus ***H*** die ***HJ*** normal auf ***CD*** geführt, die ***HJ*** in ***K*** halbirt, mit dieser Hälfte der Bogen ***AB*** aus ***F*** in ***L*** und aus ***F'*** in ***M*** geschnitten, so sind ***L*** und ***M*** die verlangten Dreitheilungspunkte des gegebenen Winkels.

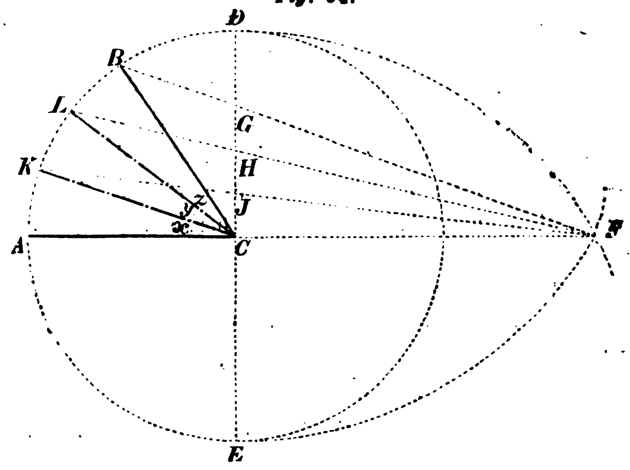
Anmerkung. Die Punkte ***L*** und ***M*** können auch dadurch erhalten werden, indem man ***F'C*** bis ***P*** und ***FC*** bis ***Q*** verlängert, ***JK'*** = ***JK*** macht, sodann aus ***P*** durch ***K'*** und aus ***Q*** durch ***K*** Gerade führt.

XI. Trisections-Methode.

Dieses Verfahren wollen wir Segment-Methode nennen, weil die Trisection mittels der Eintheilung des auf dem Halbmesser erhaltenen Segmentes bewerkstelliget wird.

Es sei nun ***ACB*** (Fig. 64) der zu theilende Winkel. Man

Fig. 64.



beschreibe aus dem Scheitelpunkte C mit einem beliebigen Halbmesser AC einen Kreis, führe dann durch den Scheitelpunkt C einen Durchmesser DE senkrecht auf AC, beschreibe aus den Endpunkten dieses Durchmessers mit dem Radius gleich diesem Durchmesser 2 Bögen, welche sich bei F schneiden. Nun wird der Punkt F mit dem Punkte B durch eine Gerade verbunden, welche von dem Halbmesser CD das Stück CG abschneidet. Wird endlich dieses Stück in drei gleiche Theile getheilt und durch die so erhaltenen Theilungspunkte d. i. durch H und J aus dem Punkte F bis zu dem zu theilenden Bogen Gerade geführt, so theilen diese den gegebenen Bogen in drei gleiche Theile, so dass

$$\text{arc}\, AK = KL = LB = \tfrac{1}{3} AB$$

wird. Werden ferner auch die Theilungspunkte K und L mit dem Punkte C durch Gerade verbunden, so wird auch der gegebene Winkel näherungsweise in drei gleiche Theile getheilt, so dass

$$\measuredangle ACK = KCL = LCB = \tfrac{1}{3} ACB$$

erfolgt.

Diese Methode ist, wie man aus der Construction sieht, sehr einfach, zugleich praktisch, jedoch ist sie bei manchen Winkeln nur auf Minuten genau.

Wir wollen nun auch diese Methode durch Rechnung untersuchen und begründen.

Setzen wir in der Fig. 65

$$AC = CN = 1,$$

Fig. 65.

so ist $DE = DF = EF = 2$
und $CF = \sqrt{3} = 1{\cdot}73205$;
und da $CN = 1$ ist,
so folgt $FN = 0{\cdot}73205$.
Eben so ist $\measuredangle CFD = 30^\circ$.

Diese Werthe bleiben stets constant, während der Winkel beliebig gross angenommen werden kann.

Geben wir nun dem Winkel $ACB = \varphi$ nach und nach verschiedene Werthe, so wird auch das Segment CG, welches jedesmal in drei gleiche Theile getheilt werden muss, verändert; also bald grösser bald kleiner, je nachdem der Winkel φ grösser oder kleiner angenommen wird.

Setzen wir $\varphi = 15^\circ$, so ist dessen Ergänzungswinkel zu $2R$ d. i. $\psi = 180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$.

Da nun in dem Dreiecke BCF die zwei Seiten BC und CF bekannt sind, und der von ihnen eingeschlossene Winkel bestimmt ist, so haben wir nach der bekannten Formel:

$$\text{tang}\,\frac{\alpha-\beta}{2} = \text{tang}\,\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \frac{CF-BC}{CF+BC}$$

und

$$\log\text{tang}\,\frac{\alpha-\beta}{2} = \log\text{tang}\,\frac{\alpha+\beta}{2} + \log(CF-BC) - \log(CF+BC).$$

Da also $CF = 1{\cdot}73205$
und $BC = 1$ ist,
so folgt $CF + BC = 2{\cdot}73205$
und $CF - BC = 0{\cdot}73205$;
ebenso ist $\varphi = \alpha + \beta = 15^\circ$,
und $\frac{\varphi}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} = 7^\circ 30'$.

Diese Werthe, in die obige Formel substituirt, geben:

$$\log\text{tang}\,\frac{\alpha-\beta}{2} = \log\text{tang}\,7^\circ 30' + \log 0{\cdot}73205 - \log 2{\cdot}73205;$$

nun ist $\log\text{tang}\,7^\circ 30' = 9{\cdot}1194291 - 10$ ⎫ welches
und $\log 0{\cdot}73205 = 0{\cdot}8645407 - 1$ ⎭ addirt,
gibt $9{\cdot}9839698 - 11$,
hiervon $\log 2{\cdot}73205 = 0{\cdot}4364887$ abgezogen,
gibt $9{\cdot}5474811 - 11$,
daher $\log\text{tang}\,\frac{\alpha-\beta}{2} = 8{\cdot}5474811 - 10$;
diesem entspricht $2^\circ 1' 13{\cdot}2''$.

Da also $\frac{\alpha - \beta}{2} = 2^0\ 1'13{\cdot}2''$ gefunden wurde,

so ist $\alpha - \beta = 4^0\ 2'26{\cdot}4''$;

und da $\alpha + \beta = 15^0\ 0'\ 0''$ ist,

so folgt $2\alpha = 19^0\ 2'26{\cdot}4''$

und $\alpha = 9^0 31'13{\cdot}2''$,

somit $\beta = 5^0 28'46{\cdot}8''$.

Nachdem wir nun den Winkel β bestimmt haben, so können wir auch das Segment CG berechnen, denn es ist

$$CG = CF \operatorname{tang}\beta = 1{\cdot}73205 \operatorname{tang} 5^0 28'46{\cdot}8''$$

und $\log CG = \log 1{\cdot}73205 + \log 5^0 28'46{\cdot}8''$;

nun ist $\log 1{\cdot}73205 = 0{\cdot}2385605$ }, welches

und $\log \operatorname{tang} 5^0 28'46{\cdot}8'' = 8{\cdot}9819584 - 10$ } addirt,

gibt $9{\cdot}2205189 - 10$,

daher $\log CG = 0{\cdot}2205189 - 1$;

diesem entspricht $0{\cdot}1661571$, also ist $CG = 0{\cdot}1661571$.

Man kann also jetzt jeden von den 3 Winkeln x, y, z berechnen.

Dividiren wir das Segment CG durch 3, so erhalten wir

$$\tfrac{1}{3} CG = 0{\cdot}05538570 = CJ = JH = HG.$$

Man hat somit: $\operatorname{tang}\beta' = \frac{HC}{CF} = \frac{0{\cdot}1107714}{1{\cdot}73205}$

und $\operatorname{tang}\beta'' = \frac{JC}{CF} = \frac{0{\cdot}0553857}{1{\cdot}73205}$

daher $\log \operatorname{tang}\beta' = \log 0{\cdot}1107714 - \log 1{\cdot}73205$;

nun ist $\log 0{\cdot}1107714 = 0{\cdot}0444277 - 1$

oder $= 1{\cdot}0444277 - 2$,

wovon $\log 1{\cdot}73205 = 0{\cdot}2385605$ abgezogen,

gibt $0{\cdot}8058672 - 2$;

man hat also $\log \operatorname{tang}\beta' = 8{\cdot}8058672 - 10$,

diesem entspricht $3^0 39'33{\cdot}5''$,

es ist daher $\beta' = 3^0 39'33{\cdot}5''$.

Um β'' zu finden, hat man aus der obigen Gleichung

$$\log \operatorname{tang}\beta'' = \log 0{\cdot}0553857 - \log 1{\cdot}73205;$$

nun ist $\log 0{\cdot}553857 = 0{\cdot}7433977 - 2$

und $\log 1{\cdot}73205 = 0{\cdot}2385605$;

daher die Differenz $= 0{\cdot}5048372 - 2$;

also ist $\log \operatorname{tang}\beta'' = 8{\cdot}5048372 - 10$;

diesem entspricht $1^0 49'53{\cdot}4''$,

folglich ist $\beta'' = 1^0 49'53{\cdot}4''$.

Da nun β' und β'' gefunden sind, so kann man auch sehr leicht die Winkel α' und α'' berechnen, denn es ist:

$$KC : CF = \sin\beta'' : \sin\alpha''$$

und $$LC : CF = \sin\beta' : \sin\alpha',$$

woraus $$\sin\alpha'' = \frac{CF \sin\beta''}{KC} = CF \sin\beta''$$

und $$\sin\alpha' = \frac{CF \sin\beta'}{CL} = CF \sin\beta' \text{ folgt;}$$

substituirt man in diesen Gleichungen die obigen Werthe, so hat man sofort: $\alpha'' = 1{\cdot}73205 \,.\, \sin 1^0 49' 58{\cdot}4''$

und $\alpha' = 1{\cdot}73205 \,.\, \sin 3^0 39' 33{\cdot}5''$,

daher $\log\sin\alpha'' = \log 1{\cdot}73205 + \log\sin 1^0 49' 58{\cdot}4''$;

nun ist $\log 1{\cdot}73205 = 0{\cdot}2385605$

und $\log\sin 1^0 49' 58{\cdot}4' = 8{\cdot}5048372 - 10$

daher $\log\sin\alpha'' = 8{\cdot}7433977 - 10$;

diesem entspricht $3^0\, 10' 29''$,

also ist $\alpha'' = 3^0 10' 29{\cdot}9''$,

und da $\beta'' = 1^0 49' 58{\cdot}4''$ ist,

so folgt $\alpha'' + \beta'' = 5^0\ 0' 28{\cdot}3''$;

da also $x = \alpha'' + \beta'' = 5^0\ 0' 28{\cdot}3''$ gefunden wurde,

und $\frac{\varphi}{3} = \frac{15^0}{3} = 5^0\ 0'\ 0''$ als der wahre Werth ist,

so ist der nach dieser Construction begangene Fehler

$$F = 0^0\ 0' 28{\cdot}3''.$$

Auf eben diese Art findet man auch α'; denn es ist nach der obaufgestellten Gleichung

$$\log\sin\alpha' = \log 1{\cdot}73205 + \log\sin 3^0 39' 33{\cdot}5'';$$

nun ist $\log 1{\cdot}73205 = 0{\cdot}2385605$
und $\log\sin 3^0 39' 33{\cdot}5'' = 8{\cdot}8058672 - 10$ $\Big\}$, welches addirt,

gibt $\log\sin\alpha' = 9{\cdot}0444277 - 10$;

diesem entspricht $6^0\, 21' 35{\cdot}2''$,

also ist $\alpha' = 6^0 21' 35{\cdot}2''$;

und da $\beta' = 3^0 39' 33{\cdot}5''$ ist,

so folgt

$$\alpha' + \beta' = x + y = 10^0\ 1'\ 8{\cdot}7''.$$

Zieht man nun von

$$x + y = 10^0\ 0' 68{\cdot}7''$$

den Werth $x = 5^0\ 0' 23{\cdot}3''$ ab,

so folgt $y = 5^0\ 0' 45{\cdot}4''$;

also ist bei y der Fehler

$$F = 0^{0}\ 0'45{\cdot}4''.$$

Ziehen wir ferner $x + y$ von $x + y + z = \varphi = 15^{0}$ ab, so folgt, da $x + y + z = 14^{0}\,59'\,60'' = \varphi$

und $x + y = 10^{0}\ 1'\ 8{\cdot}7''$ ist,

der Winkel $z = 4^{0}\,58'\,51{\cdot}3''$.

Wir haben somit:

$$x = 5^{0}\ 0'\,23{\cdot}3''$$
$$y = 5^{0}\ 0'\,45{\cdot}4''$$

und $z = 4^{0}\,58'\,51{\cdot}3''$

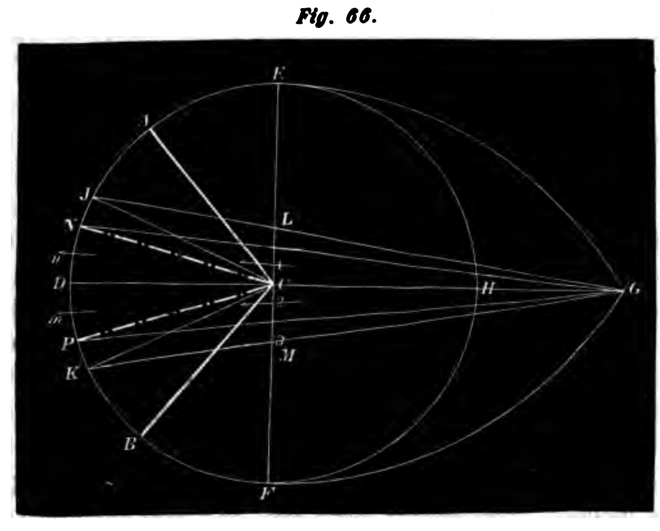
daher $x + y + z = 15^{0}\ 0'\ 0''$.

Man sieht also daraus, dass der erste Theil des Bogens, von A angefangen, d. i. AK am richtigsten ist, wovon man sich jedesmal durch Rechnung überzeugen kann.

Aus diesem folgt nun, dass man jeden beliebigen Winkel auch nach dieser Methode bis 90^{0} auf Secunden genau in drei gleiche Theile theilen kann, wenn man ihn nach Bedarf zuerst in zwei oder in vier gleiche Theile getheilt hat.

Ist also z. B. der Winkel ACB (Fig. 66) zuerst in 4 gleiche Theile getheilt, so verbinde man die Punkte J und K mit G, theile

Fig. 66.



das hierdurch erhaltene Segment LM in drei gleiche Theile, führe durch 1 und 2 bis zu den Punkten m und n Gerade, wodurch

$Dm = Dn = \frac{1}{3} DJ = \frac{1}{3} DK = \frac{1}{6} AD = \frac{1}{6} BD = \frac{1}{12} AB$ erfolgt. Um zuletzt die Punkte N und P zu erhalten, braucht man nur $Pm = Dm$ und $Nn = Dn$ zu machen und es wird daher

$$AN = NP = PB = \frac{1}{3} AB$$

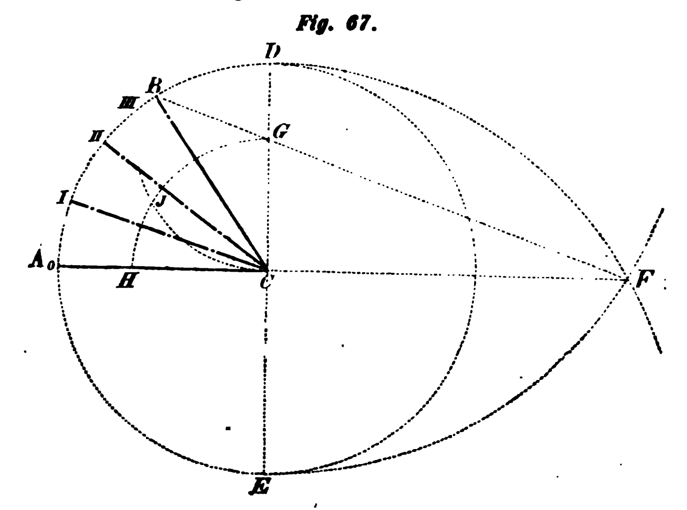
auf Secunden genau erfolgen.

XII. Trisections-Methode.

Dieses Verfahren wollen wir aus dem Grunde Quadranten-Methode nennen, weil wir mittels des mit dem Segmente beschriebenen Quadranten die Dreitheilung vornehmen.

Es sei ACB (Fig. 67) der zu theilende Winkel; man beschreibe aus C mit einem beliebigen Radius einen Kreis, führe dann durch

Fig. 67.

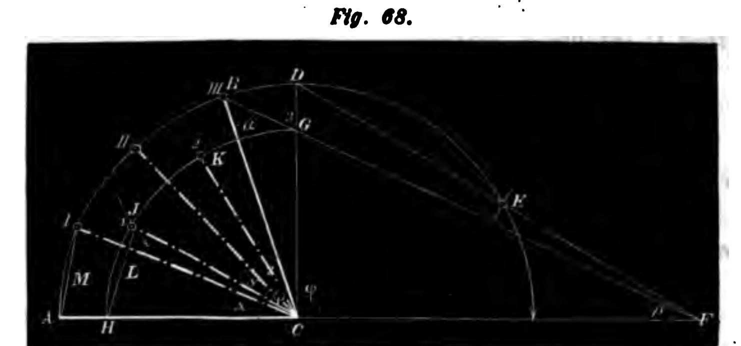


den Scheitelpunkt C auf den einen Schenkel einen senkrechten Durchmesser, hier $DE \perp AC$ in C, beschreibe aus D und E mit dem Radius gleich dem Durchmesser DE die Bögen DF und EF (oder was dasselbe ist, man verlängere den Schenkel AC und durchschneide die Verlängerung aus E mit DE); nun wird der so erhaltene Punkt F mit B durch eine Gerade verbunden, sodann mit dem Segmente CG aus C der Viertelkreis GH beschrieben, und aus G mit demselben Radius in J geschnitten, oder in drei gleiche Theile getheilt. Ein solcher Theil lässt sich also auf dem gegebenen Bogen mit einer ausserordentlichen Genauigkeit dreimal auftragen.

Wir wollen nun dieses Verfahren näher untersuchen.

Bei der näheren Betrachtung dieser Construction sehen wir, dass das Segment CG (Fig. 68) eine veränderliche (variable) Grösse

Fig. 68.



ist, während der Winkel HCJ, dessen Sehne gleich der Sehne des dritten Theiles des gegebenen Winkels sein soll, stets ungeändert (constant) bleibt. Wir brauchen also nur das Segment CG zu bestimmen, so lässt sich auch die Sehne HJ sehr leicht finden.

Bekanntlich lässt sich der rechte Winkel mathematisch genau in drei gleiche Theile theilen; es soll sich daher auch jeder Winkel desto genauer theilen lassen, je näher er an 90^0 ist, und umgekehrt, je kleiner der Winkel, desto grösser soll der Fehler sein.

Setzen wir der Kürze wegen den Halbmesser $AC = 1$, so ist $CF = \sqrt{3} = 1·73205$, und da diese Grösse bei jedem Winkel constant bleibt, so können wir somit jedesmal den Winkel $BFC = \beta$ und das Segment CG, welches veränderlich ist, berechnen, wenn wir dem Winkel $ACB = \varphi$ nach und nach verschiedene Werthe geben.

Ist der Winkel $\varphi = R = 90^0$, so wird das Segment $CD = AC = 1$, und dann ist die Theilung des Winkels mathematisch richtig; ist der Winkel $\varphi = 0$, so wird auch das Segment $CG = 0$.

Nehmen wir nun den zu theilenden Winkel $\varphi = 60^0$ an, so ist dessen Ergänzungswinkel zu $2R$ d. i. der Winkel $\psi = 120^0$; wir haben somit, wie die Figur zeigt, zwei Seiten d. i. BC und CF, wie auch den von ihnen eingeschlossenen Winkel d. i. $BCF = \psi$ gegeben, und man hat daher nach der hierfür bekannten Formel:

$$\text{tang}\, \frac{\alpha - \beta}{2} = \text{tang}\, \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \frac{CF - BC}{CF + BC} \quad \ldots . \text{I)};$$

da nun $CF = 1{\cdot}7320508$
und $BC = 1$ ist,
so folgt $CF + BC = 2{\cdot}7320508$
und $CF - BC = 0{\cdot}7320508$; welche Werthe in die obige Formel I) substituirt, gibt:

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha-\beta}{2} = \operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \frac{0{\cdot}7320508}{2{\cdot}7320508};$$

Da nun die Linien CF und BC bei jedem Winkel vermöge der Construction ungeändert bleiben, so wird auch ihr Werth stets im constanten Verhältnisse sein. Verrichtet man nun hier die angezeigte Division, so geht die obige Formel in die nachfolgende über:

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha-\beta}{2} = \operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot 0{\cdot}2679518 \;.\;.\;.\; \text{II)};$$

ist nun $\varphi = \alpha + \beta = 60^0$ angenommen,

so folgt $\frac{\varphi}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} = 30^0$;

daher $\operatorname{tang}\frac{\alpha-\beta}{2} = \operatorname{tang} 30^0 \times 0{\cdot}2679518$

und $\log\operatorname{tang}\frac{\alpha-\beta}{2} = \log\operatorname{tang} 30^0 + \log 0{\cdot}2679518$;

nun ist $\log\operatorname{tang} 30^0 = 9{\cdot}7614394 - 10$
und $\log 0{\cdot}2679518 = 0{\cdot}4280567 - 1$ } , welches addirt,
gibt $= 10{\cdot}1894961 - 11$,

also $\log\operatorname{tang}\frac{\alpha-\beta}{2} = 9{\cdot}1894961 - 10$;

diesem entspricht $8^0\,47'\,38{\cdot}6''$.

Es ist somit $\frac{\alpha-\beta}{2} = 8^0\,47'\,38{\cdot}6''$,

folglich $\alpha - \beta = 17^0\,35'\,17{\cdot}2''$;
da also $\alpha + \beta = 59^0\,59'\,60''$
und $\alpha - \beta = 17^0\,35'\,17{\cdot}2''$ ist,
so folgt durch Subtraction:

$$2\beta = 42^0\,24'\,42{\cdot}8'',$$

daher $\beta = 21^0\,12'\,21{\cdot}4''$.

Da nun jetzt der Winkel β bekannt ist, so kann man sehr leicht auch das Segment CG berechnen, denn es ist:

$$CG = CF \operatorname{tang}\beta$$
$$= 1{\cdot}7320508 \,.\, \operatorname{tang} 21^0\,12'\,21{\cdot}4'',$$

daher $\log CG = \log 1{\cdot}7320508 + \log\operatorname{tang} 21^0\,12'\,21{\cdot}4''$;

$$\left.\begin{array}{lrl} \text{nun ist} & \log 1{\cdot}7320508 & = 0{\cdot}2385606 \\ \text{und} & \log\tan 21^\circ 12' 21{\cdot}4'' & = 9{\cdot}5886912 - 10 \end{array}\right\}, \text{ welches addirt,}$$

$$\begin{array}{lrl} \text{gibt} & & = 9{\cdot}8273854 - 10; \\ \text{daher} & \log CG & = 0{\cdot}8273854 - 1, \\ \text{diesem entspricht} & & \ 0{\cdot}6720249. \\ \text{Es ist also} & CG & = 0{\cdot}6720249. \end{array}$$

Nun kann man auch die Sehne HJ berechnen, indem nach der Construction $CH = CJ = CG$ gemacht wird, und der Winkel HCJ stets der dritte Theil des rechten Winkels HCG bleibt, also $= 30^\circ$ ist. Setzen wir nun den halben Winkel von HCJ d. i. $HCL = w$, so hat man

$$HL = HC \sin w;$$

und da $HC = CJ = CG$ nach der Construction ist, so kann man den dafür gefundenen Werth substituiren, und hat somit

$$HL = 0{\cdot}6720249 \sin 15^\circ,$$

$$\begin{array}{lrl} \text{daher} & \log HL & = \log 0{\cdot}6720249 + \log\sin 15^\circ; \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lrl} \text{nun ist} & \log 0{\cdot}6720249 & = 0{\cdot}8273854 - 1 \\ \text{und} & \log\sin 15^\circ & = 9{\cdot}4129962 - 10 \end{array}\right\}, \text{ welches addirt,}$$

$$\begin{array}{lrl} \text{gibt} & & = 10{\cdot}2403816 - 11, \\ \text{folglich} & \log HL & = 0{\cdot}2403816 - 1; \\ \text{diesem entspricht} & & \ 0{\cdot}17392284, \\ \text{es ist daher} & HL & = 0{\cdot}17392284; \\ \text{folglich ist} & & \end{array}$$

$$JH = 2HL = 0{\cdot}34784568$$

der gefundene Werth der auf dem Bogen AB aufzutragenden Sehne.

Um nun zu wissen, in wieferne diese Sehne mit der Sehne des dritten Theiles des gegebenen Winkels übereinstimmt, müssen wir auch diese berechnen.

Da also $\measuredangle ACB = \varphi = 60^\circ$ angenommen wurde, so ist $\frac{1}{3} ACB = \frac{1}{3}\varphi = 20^\circ$; halbirt man nun AI in M, so ist $\frac{1}{2} ACI = \frac{1}{6}\varphi = 10^\circ$. Man hat demnach

$$AM = AC \sin 10^\circ$$

$$\begin{array}{lrl} \text{und wegen} & AC & = 1 \\ \text{folgt} & AM & = \sin 10^\circ, \\ \text{daher} & \log AM & = \log\sin 10^\circ; \\ \text{nun ist} & \log\sin 10^\circ & = 9{\cdot}2396702 - 10, \\ \text{folglich} & \log AM & = 0{\cdot}2396702 - 1; \\ \text{diesem entspricht} & & \ 0{\cdot}173648, \end{array}$$

folglich ist $AM = 0·173648$,
somit $AI = 2AM = 0·347296$,
und da $HJ = 2AL = 0·347845$ gefunden wurde,
so folgt der Fehler $F = -0·000549$;
also ist die Sehne HJ verglichen mit der Drittelsehne des gegebenen Winkels um 0·000549 zu gross.

Setzt man $\varphi = 30^0$, so findet man auf ähnliche Art
$AI = 2AM = 0·174311$
und $HJ = 2AL = 0·172545$,
somit ist der Fehler $F = 0·001766$;
also ist die für diesen Fall nach der Construction erhaltene Sehne um 0·001766 zu klein.

Setzt man $\varphi = 80^0$ so, erhält man ebenso
$AI = 2AM = 0·4612316$
und $HJ = 2AL = 0·4633207$,
daher der Fehler $F = 0·0020891$;
also ist die für diesen Fall nach der Construction erfolgte Sehne um 0·0020891 zu gross.

Bei diesem Verfahren lässt sich ebenso eine einfache Formel für die Berechnung der Winkel aufstellen.

Setzt man den Halbmesser AC, mit dem der Bogen für den gegebenen Winkel beschrieben wurde, $= R = 1$, und den Halbmesser für den Trisections-Quadranten d. i. das Segment $CG = r$, so hat man, wenn der zu suchende Winkel als Drittel mit x bezeichnet wird:

$$r \,.\, 2 \sin 15 = 2 \sin \frac{x}{2},$$

daher

$$\sin \frac{x}{2} = r \,.\, \sin 15^0 \quad . \; . \; . \; . \quad \text{I)}$$

Setzt man ferner $CF = a$, $CE = 1$ und $CG = r$, so hat man:

$$a = \text{chord}\, 120^0 = \sqrt{4-1} = \sqrt{3} = 1·7320508$$

und ebenso

$$\sin 15^0 = \tfrac{1}{2} \text{chord}\, 30^0 = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 0·2588190,$$

welche Werthe für jeden beliebigen Winkel constant bleiben.

Ist nun, wie zuvor, der gegebene Winkel $= \varphi$ und der von der Verlängerung der AC und von der Transversalen BF gebildete Winkel $= \beta$ gesetzt, so hat man in dem Dreiecke BCF:

$$\sin\beta : \sin[(180^\circ - \beta) - 180^\circ - \varphi] = 1 : a,$$

welches abgekürzt, gibt

$$\sin\beta : \sin(\varphi - \beta) = 1 : a;$$

dividirt man hier den vor dem Gleichheitszeichen stehenden Ausdruck durch $\sin\beta$, so folgt:

$$1 : \sin\varphi \ \text{cotang}\,\beta - \cos\varphi = 1 : a,$$

woraus

$$a = \sin\varphi \ \text{cotang}\,\beta - \cos\varphi$$

und hieraus

$$\frac{a + \cos\varphi}{\sin\varphi} = \text{cotang}\,\beta \ \text{folgt},$$

oder

$$\frac{\sin\varphi}{a + \cos\varphi} = \frac{1}{\text{cotang}\,\beta};$$

und da

$$\frac{1}{\text{cotang}\,\beta} = \text{tang}\,\beta \ \text{ist},$$

so hat man ferner

$$\text{tang}\,\beta = \frac{\sin\varphi}{a + \cos\varphi} \quad \ldots\ldots \quad \text{II)}$$

Betrachtet man jetzt das rechtwinklige Dreieck *CGF*, so findet man:

$$r = a\,\text{tang}\,\beta,$$

worein der Werth für $\text{tang}\,\beta$ aus II) substituirt, gibt:

$$r = a\,.\,\frac{\sin\varphi}{a + \cos\varphi} \quad \ldots\ldots \quad \text{III)}$$

Substituirt man nun den für r gefundenen Werth in die Formel I), so folgt:

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{a\,.\,\sin\varphi}{a + \cos\varphi}\,.\,\sin 15^\circ$$

oder

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{a\,.\,\sin 15^\circ\,.\,\sin\varphi}{a + \cos\varphi} \quad \ldots \quad \text{IV)}$$

und da nach dieser Construction der Werth für a so wie für $\sin 15^\circ$ stets constant bleibt, so hat man durch gehörige Substitution dieser Werthe in den letzten Ausdruck

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{1\text{·}7320508\,.\,0\text{·}2588190\,.\,\sin\varphi}{a + \cos\varphi};$$

multiplicirt man zuletzt die 2 Zahlen des Zählers miteinander, so folgt endlich:

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{0{\cdot}4482876 \sin\varphi}{1{\cdot}7320508 + \cos\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad V)$$

als eine Formel für die leichtere Berechnung des fraglichen Drittels eines jeden beliebigen Winkels, zumal da sich diese Formel sehr leicht logarithmisch behandeln lässt; denn es ist:

$$\log\sin\frac{x}{2} = \log 0{\cdot}4482875 + \log\sin\varphi - \log(1{\cdot}7320508 + \cos\varphi).$$

Bevor wir nach dieser Formel rechnen, wollen wir uns zuerst überzeugen, ob sie für den Winkel $\varphi = 90^0$ ganz richtig ist. Es ist die Seite

$$a = \text{chord } 120^0 = \sqrt{3},$$

ferner $$\sin 15^0 = \tfrac{1}{2} \text{ chord } 30^0 = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2});$$

da nun für $\varphi = 90^0$, $\sin\varphi = 1$ und $\cos\varphi = 0$ ist, so hat man durch Substitution dieser Werthe in die Formel IV):

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{a \,.\, \sin 15^0 \,.\, \sin\varphi}{a + \cos\varphi} = \frac{\sqrt{3} \,.\, \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \,.\, 1}{\sqrt{3} + 0}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \,.\, \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{\sqrt{3}} = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2});$$

daher $$\sin x = \tfrac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2});$$

es ist aber nach der Trigonometrie

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = \text{chord } 30^0,$$

somit ist diese Formel ganz richtig.

Nimmt man nun $\varphi = 45^0$ an, so hat man:

$$\cos 45^0 = 0{\cdot}7071068$$

hiezu $1{\cdot}7320508$ addirt,

gibt $2{\cdot}4391576$,

daher $$\log\sin\frac{x}{2} = \log 0{\cdot}4482876 + \log\sin 45^0 - \log 2{\cdot}4391576;$$

nun ist $\log 0{\cdot}4482876 = 0{\cdot}6515567 - 1$

und $\log\sin 45^0 = 9{\cdot}8494850 - 10$, welches addirt,

gibt $9{\cdot}5010417 - 10$,

wovon $\log 2{\cdot}4391576 = 0{\cdot}3872399$ abgezogen,

gibt $$\log\sin\frac{x}{2} = 9{\cdot}1138013 - 10;$$

diesem entspricht $7^0 28' 2''$.

Man hat somit $$\frac{x}{2} = 7^0 28' 2'',$$

daher $$x = 14^0 56' 4'';$$

da also der wahre Werth für den dritten Theil von φ, also

$$\frac{\varphi}{3} = 14^0 59' 60'' \text{ ist,}$$

und $x = 14^0 56' 4''$ gefunden wurde, so ist der

Fehler $F = 0^0 3' 56''$.

Um diesen Fehler im Längenmasse des Bogens zu bestimmen, hat man, wenn der Halbmesser $= 1$ gesetzt wird,

für arc $3' = 0\cdot00087266$,

für arc $56'' = 0\cdot00027150$,

daher für arc $3' 56'' = 0\cdot00114416$,

daher der Fehler im Längenmasse des Bogens

$$F = \frac{1}{1000}.$$

Es ist also der Bogen des gefundenen Winkels um $\frac{1}{1000}$ zu klein. Sucht man nun auch die Sehne für den gefundenen Winkel, so hat man:

$mp = mo \,.\, \sin 7^0 28' 2''$

und $\log mp = \log \sin 7^0 28' 2''$;

nun ist $\log 7^0 28' 2'' = 9\cdot1138018 - 10$,

daher $\log mp = 0\cdot1138018 - 1$;

diesem entspricht $0\cdot1299763$;

es ist somit $mp = 0\cdot1299763$,

daher $2mp = 0\cdot2599526$

und da chord $15^0 = 0\cdot2610524$

und $2mp = 0\cdot2599526$ ist,

so folgt $F = 0\cdot0010998$

oder $F = \frac{1}{1000}$.

Nach dieser Formel kann man also sehr leicht den Werth für jedes fragliche Drittel eines gegebenen Winkels berechnen.

Rechnet man nun nach dieser Formel den Werth von x für alle Winkel von 5 zu 5 Grade bis 90, so findet man, wenn man den Fehler mit F bezeichnet, folgende Resultate und Fehler:

Für	$\varphi = 5^0$	ist $x =$	$1^0 38' 28''$	daher	$F = 0^0 1' 32''$
„	$\varphi = 10^0$	„ $x =$	$3^0 17' 1\cdot4''$	„	$F = 0^0 2' 58\cdot6''$
„	$\varphi = 15^0$	„ $x =$	$4^0 55' 46''$	„	$F = 0^0 4' 14''$
„	$\varphi = 20^0$	„ $x =$	$6^0 34' 46\cdot8''$	„	$F = 0^0 5' 13\cdot6''$
„	$\varphi = 25^0$	„ $x =$	$8^0 14' 8''$	„	$F = 0^0 5' 32''$
„	$\varphi = 30^0$	„ $x =$	$9^0 53' 55\cdot4''$	„	$F = 0^0 6' 4\cdot6''$
„	$\varphi = 35^0$	„ $x =$	$11^0 34' 8''$	„	$F = 0^0 5' 52''$

Für	$\varphi = 40^\circ$	ist	$x = 13^\circ\, 14'\, 50''$	daher	$F = 0^\circ\; 5'\, 10''$
„	$\varphi = 45^\circ$	„	$x = 14^\circ\, 56'\; 4''$	„	$F = 0^\circ\; 3'\, 56''$
„	$\varphi = 50^\circ$	„	$x = 16^\circ\, 37'\, 42{\cdot}8''$	„	$F = 0^\circ\; 2'\, 17{\cdot}2''$
„	$\varphi = 55^\circ$	„	$x = 18^\circ\, 19'\, 42{\cdot}8''$	„	$F = 0^\circ\; 0'\, 17{\cdot}2''$
„	$\varphi = 60^\circ$	„	$x = 20^\circ\; 1'\, 58''$	„	$F = -0^\circ\; 1'\, 58''$
„	$\varphi = 65^\circ$	„	$x = 21^\circ\, 44'\, 15{\cdot}4''$	„	$F = -0^\circ\; 4'\, 15{\cdot}4''$
„	$\varphi = 70^\circ$	„	$x = 23^\circ\, 26'\, 13{\cdot}4''$	„	$F = -0^\circ\; 6'\, 13{\cdot}1''$
„	$\varphi = 75^\circ$	„	$x = 25^\circ\, 10'\, 59{\cdot}6''$	„	$F = -0^\circ\, 10'\, 59{\cdot}6''$
„	$\varphi = 80^\circ$	„	$x = 26^\circ\, 46'\, 28{\cdot}4''$	„	$F = -0^\circ\; 6'\, 28{\cdot}4''$
„	$\varphi = 85_0$	„	$x = 28^\circ\, 25'\, 14''$	„	$F = -0^\circ\; 5'\, 14''$
„	$\varphi = 90^\circ$	„	$x = 30^\circ\; 0'\; 0''$	„	$F = 0$

Aus dieser schematischen Darstellung der berechneten x, so wie der Fehler sieht man nun leicht ein, dass die Fehler nicht so wie bei manchen der vorhergehenden Methoden immer wachsen, oder grösser werden, je grösser der Winkel angenommen wird, sondern dass für die Winkel von 0° bis 90° zwei Maxima und drei Minima stattfinden. Denn es ist für $\varphi = 0$ auch $x = 0$, somit auch $F = 0$; für $\varphi = 90^\circ$ ist die Construction mathematisch richtig, indem das Segment gleich dem Halbmesser wird, und daher der Hilfsbogen mit dem des gegebenen von dem rechten Winkel zusammenfällt.

Was das mittlere Minimum betrifft, so ist es nicht gerade bei dem Winkel $\varphi = 55^\circ$, sondern ungefähr bei dem Winkel $55^\circ 40'$. Man findet also: für $\varphi = 55^\circ 40'$, $x = 18^\circ 33' 21{\cdot}6''$, welches mit dem wahren Drittel ganz übereinstimmt, sobald 1·6 Sekunden nicht berücksichtigt werden.

Was die zwei Maxima betrifft, so ist das eine davon bei dem Winkel $\varphi = 30^\circ$ und das andere bei dem Winkel $\varphi = 75^\circ$. Letzteres ist wohl bedeutend gross; dessen ungeachtet ist diese Methode als eine äusserst interessante und höchst praktische anzusehen, zumal da sie höchst einfach ist und eine für die Praxis hinlängliche Genauigkeit gewährt.

Drückt man die zuvor gefundenen Fehler im Längenmasse des Bogens aus, so hat man, wie folgt:

Beim ∡	$\varphi = 5^0$	für	$1' 32''$	ist $F =$	$0{\cdot}0004459$	im Längenmasse des Bogens zu gross.
„	$\varphi = 10^0$	„	$2' 58''$	„ $F =$	$0{\cdot}0008628$	
„	$\varphi = 15^0$	„	$4' 14''$	„ $F =$	$0{\cdot}0012313$	
„	$\varphi = 20^0$	„	$5' 13''$	„ $F =$	$0{\cdot}0015174$	
„	$\varphi = 25^0$	„	$5' 52''$	„ $F =$	$0{\cdot}0017065$	
„	$\varphi = 30^0$	„	$6' 4''$	„ $F =$	$0{\cdot}0017646$ Max.	
„	$\varphi = 35^0$	„	$5' 52''$	„ $F =$	$0{\cdot}0017065$	
„	$\varphi = 40^0$	„	$5' 10''$	„ $F =$	$0{\cdot}0015028$	
„	$\varphi = 45^0$	„	$3' 56''$	„ $F =$	$0{\cdot}0011440$	
„	$\varphi = 50^0$	„	$2' 17''$	„ $F =$	$0{\cdot}0006641$	
„	$\varphi = 55^0$	„	$0' 17''$	„ $F =$	$0{\cdot}0000824$ Min.	
„	$\varphi = 60^0$	„ —	$1' 58''$	„ $F =$	$-0{\cdot}0005719$	im Längenmasse des Bogens zu klein.
„	$\varphi = 65^0$	„ —	$4' 15''$	„ $F =$	$-0{\cdot}0012362$	
„	$\varphi = 70^0$	„ —	$6' 13''$	„ $F =$	$-0{\cdot}0018083$	
„	$\varphi = 75^0$	„ —	$10' 59''$	„ $F =$	$-0{\cdot}0031948$ Max.	
„	$\varphi = 80^0$	„ —	$6' 28''$	„ $F =$	$-0{\cdot}0018810$	
„	$\varphi = 85$	„ —	$5' 14''$	„ $F =$	$-0{\cdot}0015222$	

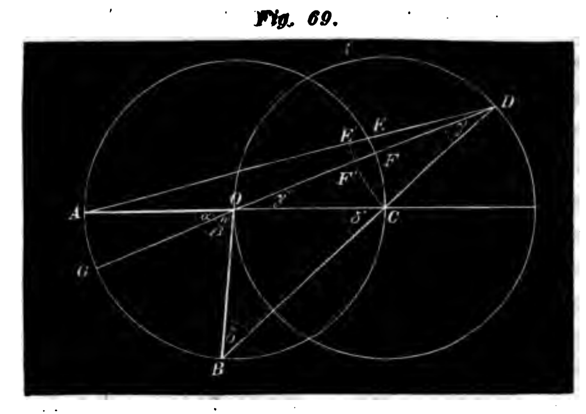
Aus dieser Darstellung sieht man, dass die Fehler im Allgemeinen von der dritten Dezimalstelle anfangen, also nur Tausendstel sind; und selbst das zweite grössere Maximum nur $\frac{8}{1000}$ im Längenmasse des Bogens beträgt. Nimmt man nun den Halbmesser so gross an, dass der ihm entsprechende Bogen ungefähr = 6 Zoll natürlicher Grösse ist, so kann man dann sehr leicht erkennen, wie gross der hierdurch begangene Fehler ist. Es ist nämlich $\frac{1}{1000}$ von 6'' = der Dicke eines feinen Striches, wovon man sich aus jedem gut gearbeiteten Transversalmassstabe überzeugen kann; somit wäre für diesen Fall der Fehler, d. i. $\frac{8}{1000}$ = der Dicke der 8 feinen Striche; da aber solche Zeichnungen in der Praxis nur selten vorkommen, so ist dieses Verfahren gewiss ein praktisch richtiges und genaues, aber auch für die Wissenschaft im Allgemeinen sehr empfehlbar.

XIII. Trisections-Methode.

Diese Methode ist höchst einfach und gewährt für alle Winkel bis 90° eine ausserordentliche Genauigkeit; sie besteht in Folgendem:

Es sei *AOB* (Fig.69) der zu theilende Winkel; man beschreibe mit dem Halbmesser *AO* aus dem Scheitelpunkte *O* die-

Fig. 69.



ses Winkels einen Kreis, verlängere den Schenkel AO über O hinaus bis die Peripherie bei C geschnitten wird; beschreibe dann aus C mit demselben Radius abermals einen Kreis, ziehe aus dem Punkte B durch C eine Gerade bis die Peripherie des zweiten Kreises bei D geschnitten wird, und verbinde den so erfolgten Punkt D mit A durch eine Gerade, so erhält man das Stück CE, welches sich mit einer ausserordentlichen Genauigkeit auf dem Bogen AB dreimal auftragen lässt.

Diese Genauigkeit beruhet auf folgendem:

Wird aus dem Punkte D durch den Mittelpunkt O die Gerade DG gezogen, so theilt diese den gegebenen Winkel in zwei ungleiche Winkel, wovon einer stets kleiner und der andere grösser ist; der grössere wird stets nach diesem Verfahren mathematisch genau in drei gleiche Theile getheilt; denn es ist

$$\beta = \gamma + \delta$$

und da $\qquad \delta = \delta' = \gamma + \gamma'$

so folgt $\qquad \beta = \gamma + \gamma + \gamma' = \gamma + \gamma + \gamma$

somit $\qquad \beta = 3\gamma$

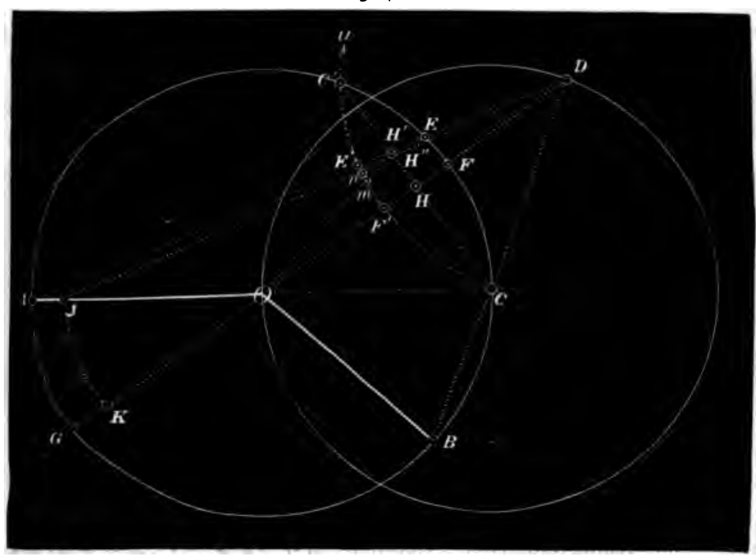
folglich ist $\qquad \gamma = \frac{\beta}{3}.$

Wird also der Bogen $CF = CF'$ auf dem Bogen BG aufgetragen, so muss er nothwendiger Weise auf BG dreimal genau enthalten sein; hingegen ist der Bogen EF in dem Bogen AG nur näherungsweise 3mal enthalten, und zwar ist der Bogen EF immer kleiner als das wahre Drittel von AG; doch wird dieser Fehler ausgeglichen, wenn man den Bogen CE auf dem Bogen AB aufträgt.

Bei einem Winkel, der über 90° ist, wird dieser Fehler bedeutend, welchen man auf folgende Art verbessert.

Es sei AOB (Fig. 70) der zu theilende Winkel, welcher mehr als 90° hat; man mache die Construction wie zuvor und

Fig. 70.



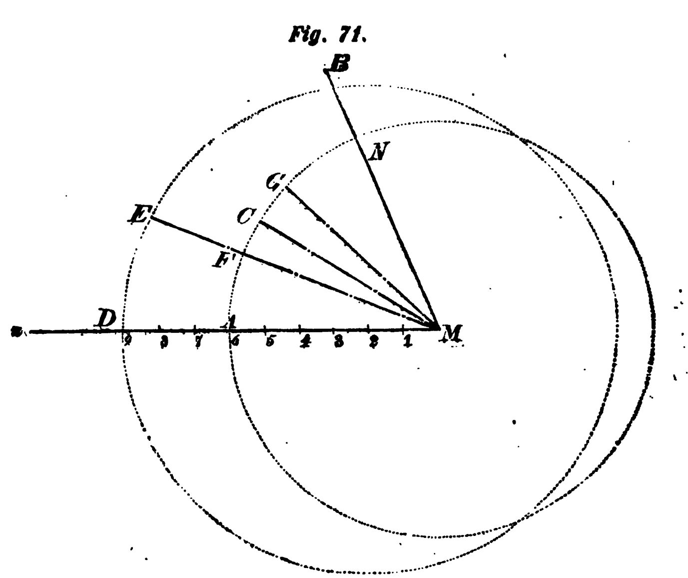
beschreibe überdies aus dem Punkte D mit dem Halbmesser DC einen Bogen Cu, welcher die AD bei E' schneidet; wird nun CE auf AB aufgetragen, so findet man ihn zu klein; wird hingegen CE' auf AB aufgetragen, so findet man ihn um eben so viel zu gross, somit wird das Drittel ein arithmetisches Mittel zwischen beiden sein; man findet daher annäherungsweise den dritten Theil des Bogens AB, indem man den Bogen CE auf CE' von C aus aufträgt, und den so erfolgten Rest halbirt, wodurch $Cn = \frac{1}{3} AB$ gefunden wird.

Man kann übrigens hierbei auch so verfahren, dass man den Winkel AOG auf das mathematisch richtige Verfahren reducirt. Man zieht nämlich die Gerade $CC' \perp DO$, so dass DO in H halbirt wird, beschreibt aus O mit DH' den Bogen JK, zieht die Gerade DJ, so lässt sich HH'' auf JK dreimal auftragen, wodurch also auch AG in drei gleiche Theile getheilt, und der Fehler auf ein Minimum reduzirt wird.

XIV. Trisections-Methode.

Diese Methode geschieht mittels des Auftragens einer beliebigen Einheit auf dem Schenkel des gegebenen Winkels, mittels eines Substitutionsbogens, wesshalb sie Substitutions-Methode genannt wird.

Fig. 71.



Man trage auf einer Geraden ***Mu*** (Fig. 71) ein beliebiges Stück ***M1*** 9mal auf, beschreibe aus ***M*** mit ***AM*** = ***M6*** den einen Kreis und aus dem Punkte ***2*** mit dem Radius ***D2*** gleich 7 solchen Theilen einen zweiten Kreis, welcher der Trisectionskreis für den gegebenen Bogen ist.

Soll nun mittels dieses Kreises die Dreitheilung irgend eines Winkels, hier des Winkels ***AMC***, vorgenommen werden, so braucht man nur auf dem Trisectionskreise vom Punkte ***D*** aus die Sehne des gegebenen Winkels aufzutragen, hier ***DE*** = ***AC*** zu machen, und den hierdurch erhaltenen Punkt ***E*** mit dem Scheitelpunkte ***M*** des gegebenen Winkels zu verbinden, wodurch auf dem ersten Kreise der dritte Theil des Bogens, hier $CF = \frac{1}{3} AC$, und der Winkel $FMC = \frac{1}{3} AMC$ abgeschnitten wird.

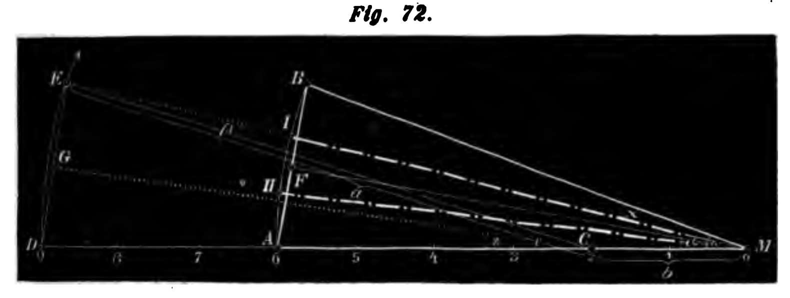
Dieses Verfahren gilt jedoch nur für jeden Winkel bis 90°; wollte man aber nach dieser Methode die Eintheilung der Winkel vornehmen, die über 90° und nahe an 180° sind, so muss auf dem Trisectionskreise die halbe Sehne des gegebenen Winkels vom Punkte ***D*** aus aufgetragen werden.

So ist für den Winkel ***AMB*** die ***DE*** = ***AC*** = der halben Sehne dieses Winkels gemacht worden und die ***EM*** gezogen, wodurch man ***AF*** als den dritten Theil des für diesen Winkel aus ***M*** mit ***AM*** beschriebenen Bogens erhält.

In wie ferne dieses Verfahren richtig ist, kann man sich auf die nachfolgende Art durch Rechnung überzeugen.

Setzt man den Halbmesser des aus M (Fig. 72) mit AM beschriebenen Kreises, also $AM = 1$, so hat man, da AM hier

Fig. 72.



6 Theile, AD aber 3 solcher Theile nach der Construction hat, chord AB (für den Halbmesser $AM = 1$) = chord DE (für den Halbmesser $D2$) oder $DC = AC + AD = 1 + \frac{1}{6}$. Gibt man ferner dem zu theilenden Winkel, hier dem $\measuredangle\, AMB = w$, nach und nach verschiedene Werthe, so kann man auch jedesmal für den Winkel x den Werth bestimmen, also für jeden Werth von w das fragliche Drittel berechnen; denn es sind, wenn man den Punkt 2 mit E durch eine Gerade verbindet, in dem Dreicke ECM die 2 Seiten EC und CM, so wie der von ihnen eingeschlossene Winkel ECM als bekannt anzusehen.

Nimmt man nun den gegebenen Winkel z. B. 30° an, so ist die halbe Sehne oder

$$\tfrac{1}{2}\,\text{chord}\,AB = AM \sin 15^\circ;$$

und wegen $$AM = 1$$

folgt $$\tfrac{1}{2}\,\text{chord}\,AB = \sin 15^\circ$$

oder $$AF = \sin 15^\circ,$$

daher $$\log AF = \log\sin 15^\circ;$$

nun ist $$\log\sin 15^\circ = 9{\cdot}4129962 - 10,$$

daher $$\log AF = 0{\cdot}4129962 - 1;$$

diesem entspricht $$0{\cdot}258819,$$

daher $$2AF = \text{chord}\,AB = 0{\cdot}258819 \times 2 = 0{\cdot}517638.$$

Da ferner $DE = AB$ ist (nach der Construction), so kann man DE als bekannt ansehen, und den für AB gefundenen Werth auch für DE substituiren, wodurch man in dem Dreiecke DCE alle 3 Seiten bekannt hat.

Man hat somit, da

$$DE = AB,$$

also auch $\frac{1}{2} DE$ oder $DG = \frac{1}{2} AB$ oder AF ist,

$$DG = DC \sin \tfrac{1}{2} DCE = DC \sin \tfrac{1}{2} v$$

oder

$$DG = DC \sin x,$$

wenn

$$x = \tfrac{1}{2} v$$

gesetzt wird, daher durch Substitution

$$0{\cdot}258819 = 1\tfrac{1}{6} \,.\, \sin \tfrac{1}{2} v$$

$$= 1{\cdot}1666666 \,.\, \sin \tfrac{1}{2} v,$$

somit

$$\sin \tfrac{1}{2} v = \frac{0{\cdot}258819}{1{\cdot}1666666},$$

daher

$$\log \sin \tfrac{1}{2} v = \log 0{\cdot}258819 - 1{\cdot}1666666;$$

nun ist $\log 0{\cdot}258819 = 0{\cdot}4129962 - 1$, welches

und $\log 1{\cdot}1666666 = 0{\cdot}0669467$ subtrahirt,

gibt $0{\cdot}3460495 - 1$,

also ist $\log \sin \frac{1}{2} v = 9{\cdot}3460495 - 10$,

diesem entspricht $12^0 49' 2'' = \frac{1}{2} DCE = \frac{1}{2} v$;

daher ist $DCE = v = 25^0 38' 4''$

und sein Nebenwinkel, d. i.

$$ECM = 180^0 - v$$

$$= \begin{array}{r} 179^0 59' 60'' \\ -\ 25^0 38'\ 4'' \\ \hline \end{array}$$

$$= 154^0 21' 56''.$$

Da also in dem Dreiecke ECM die 2 Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bekannt ist, so kann man auch die 2 anderen Winkel finden.

Setzt man nun $EC = a$, $MC = b$; ferner den Gegenwinkel von $a = \alpha$ und den von $b = \beta$, so hat man nach der bekannten Formel auch hier:

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha - \beta}{2} = \operatorname{tang} \frac{\alpha + \beta}{2} \,.\, \frac{a - b}{a + b};$$

da also $v = \alpha + \beta = 25^0 38' 4''$,

ferner $EC = a = 1\frac{1}{6} = 1{\cdot}1666666$

und $MC = b = \frac{1}{3} = 0{\cdot}3333333$ ist,

so folgt $EC - CM = a - b = 0{\cdot}8333333$

und $EC + MC = a + b = 1{\cdot}4999999$;

daher durch Substitution in die obige Formel

$$\text{tang}\,\frac{\alpha-\beta}{2} = \text{tang}\; 12^0 49' 2'' \cdot \frac{0\cdot8333333}{1\cdot4999999}$$

und

$$\log \text{tg}\,\frac{\alpha-\beta}{2} = \log \text{tg}\; 12^0 49' 2'' + \log 0\cdot8333333 - \log 1\cdot4999999\,;$$

nun ist	$\log \text{tang}\; 12^0 49' 2''$ =	$9\cdot3570015 - 10$	welches addirt,
und	$\log 0\cdot833333$ =	$0\cdot9208187 - 1$	
gibt		$10\cdot2778202 - 11$	welches subtrahirt,
ferner ist	$\log 1\cdot4999999$ =	$0\cdot1750913$	
gibt		$10\cdot1027289 - 11$,	
somit	$\log \text{tang}\,\frac{\alpha-\beta}{2}$ =	$9\cdot1027289 - 10$;	
diesem entspricht		$7^0 13' 12''$,	
also ist	$\frac{\alpha-\beta}{2}$ =	$7^0 13' 12''$,	
somit	$\alpha-\beta$ =	$14^0 26' 24''$.	
Da also	$\alpha+\beta$ =	$25^0 37' 64''$	
und	$\alpha-\beta$ =	$14^0 26' 24''$ ist,	
so folgt	2α =	$40^0 4' 28''$	
und	α =	$20^0 2' 14''$.	

Da also Winkel α derjenige ist, dessen Schenkel EM den Bogen AB in I einschneidet, so ist AI = arc von α = $\frac{2}{3}$ arc von $\sphericalangle\, w$; und da $\sphericalangle\, w = 30^0$ angenommen wurde, so ist $\frac{1}{3} w = 10$, und $\frac{2}{3} w = 20$, und da arc $AI = 20^0 2' 14''$ gefunden wurde, so ist der nach dieser Construction begangene Fehler $F = 0^0 2' 14''$ bei einem Winkel von 30^0.

Daher hat man

$$\begin{aligned}
\sphericalangle\, BMI &= AMB - AMI \\
&= 30^0 - 20^0 2' 14'' \\
&= \left\{\begin{array}{r} 29^0 59' 60'' \\ -\,20^0\ \ 2' 14'' \end{array}\right. \\
&= \quad 9^0 57' 46'',
\end{aligned}$$

folglich ist das hier nach der Construction erhaltene Drittel, d. i. $\sphericalangle\, BMI$ um $0^0 2' 14''$ zu klein; während $\sphericalangle\, AMI$ als $\frac{2}{3}$ von dem gegebenen Winkel um $0^0 2' 14''$ zu gross ist.

Setzt man den Winkel $AMB = w = 60^0$, so findet man auf ähnliche Art mittels der obigen Formel

$$\alpha = 40^0 10' 21\cdot2'',$$

somit wird das nach dieser Art gefundene Zweidrittel um $0^0 10' 21\cdot2''$ zu gross und das Eindrittel um $0^0 10' 21\cdot2''$ zu klein sein.

Setzt man den Winkel $AMB = w = 15^\circ$, so findet man auf ähnliche Art mittels der obigen Formel

$$\alpha = 10^\circ\, 0'\, 58'';$$

somit wird das nach dieser Art gefundene Zweidrittel um $0^\circ\, 0'\, 58''$ zu gross und das Eindrittel um $0^\circ 0^\circ\, 58''$ zu klein sein.

Man sieht also daraus, dass dieses Verfahren eine praktische Genauigkeit gewährt, und da die Construction höchst einfach ist, so wird man jedenfalls bei der Anwendung derselben eher fertig als mit der gewöhnlichen Probirmethode.

Um die Theilungspunkte an Ort und Stelle zu erhalten und selbst auch bei grösseren Winkeln einen geringeren Fehler zu begehen, verfahre man auf folgende Art: Es sei ACB (Fig. 73) der zu theilende Winkel, der nahe an 90° ist. Man trage eine beliebige Einheit $C1$ auf dem einen Schenkel BC 2mal und auf dem anderen, d. i. auf AC 9mal auf; beschreibe aus C mit $CE = C6$ den Bogen EF, dann mit 7 solchen Einheiten aus 2 der AC den Bogen Gm und aus 2 der BC den Bogen Hn, welche sich bei J schneiden. Verbindet man nun J mit dem Scheitelpunkte C, trägt die hierdurch erhaltene Hälfte des Bogens EF d. i. EM auf Gm von G nach N, so wie auf Hn von H nach O, und verbindet zuletzt die Punkte N und O mit dem Scheitelpunkte C durch Gerade, so theilen diese den Bogen EF uud den ihm entsprechenden Winkel ECF in 3 gleiche Theile.

Fig. 73.

Es ist also hier der Winkel zuerst halbirt, dann in 3 und auch in 6 gleiche Theile getheilt, wie diess die Figur zeigt. Die Halbirung muss hier mit einer sehr grossen Genauigkeit gemacht werden, wesshalb also hier ausser dem Punkte J noch die 2 Punkte K und L für die Halbirungslinie bestimmt werden müssen.

Hier lässt sich zugleich der Fehler bemerken, den man beginge, wenn man statt der halben Sehne die ganze benützen würde, welches hier mittels Einschnitte bei R und S angezeigt ist.

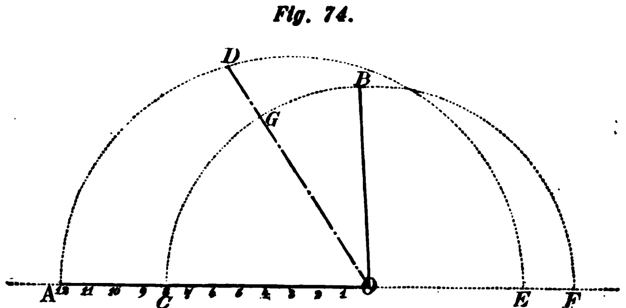
Ebenso ist diese Construction einfach und sehr interessant, wenn der gegebene Winkel in 12, 24, 48 .... gleiche Theile getheilt werden soll.

XV. Trisections-Methode.

Eine andere Methode mittels des Auftragens einer beliebigen Einheit auf dem einen Schenkel ist die nachfolgende, welche ebenfalls eine praktisch-genaue Substitutions-Methode ist.

Es sei *AOB* (Fig. 74) der zu theilende Winkel. Man nehme *O*1 als eine beliebige Einheit an, und trage sie von O aus auf dem

Fig. 74.



einen Schenkel, hier auf *AO*, 12mal auf; beschreibe aus *O* mit *O*8 den einen Halbkreis und aus dem Punkte 3 mit 3 12 den zweiten, welcher der substituirte Trisectionsbogen sein wird.

Um nun mittelst dieses Bogens die Trisection vorzunehmen, fasse man die Sehne *BC* des gegebenen Winkels *BOC* in Zirkel, trage sie auf den Halbkreis *ADE* von *A* aus einmal auf, und verbinde den so erfolgten Punkt *D* mit *O* durch eine Gerade, wodurch auf dem Bogen *BC*, welcher als der des gegebenen Winkels zu betrachten ist, das Stück $BG = \frac{1}{3} BC$ abgeschnitten wird, und wodurch auch $\measuredangle BOG = \frac{1}{3} BOC$ erfolgt.

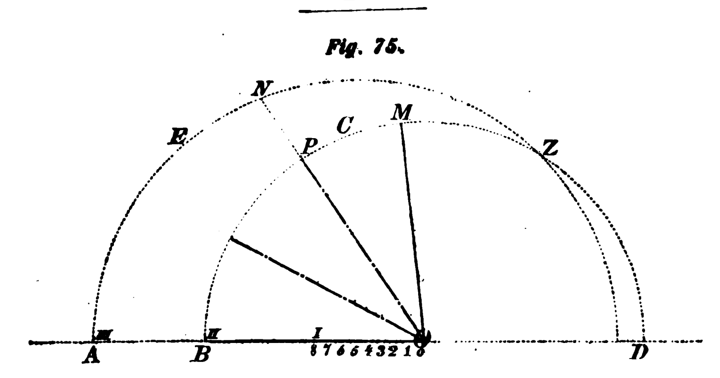
Diese Methode ist sehr einfach und bis etwa 90° ziemlich genau.

Die Rechnung wird auf ähnliche Art wie bei der vorhergehenden Methode geführt.

XVI. Trisections-Methode.

Es sei z. B. *AOM* (Fig. 75) der zu theilende Winkel. Man trage auf dem einen Schenkel des gegebenen Winkels, hier auf *OA*,

Fig. 75.



eine beliebige Einheit, hier $O\,1$, achtmal auf, ferner diese acht Einheiten zusammengenommen noch zweimal auf, wodurch man die zwei Punkte A und B erhält. Man beschreibe alsdann aus O mit BO den Halbkreis $BCZD$, und aus 5 mit $A\,5$ den zweiten Halbkreis $AENZ$. Wird nun die Sehne irgend eines Winkels z. B. des Winkels BOM auf AEZ von A aus aufgetragen, und der so erhaltene Punkt N mit O verbunden, so ist der Winkel $POM = \frac{1}{3} BOM$.

Diese Methode ist für jeden Winkel bis 90° ziemlich genau.

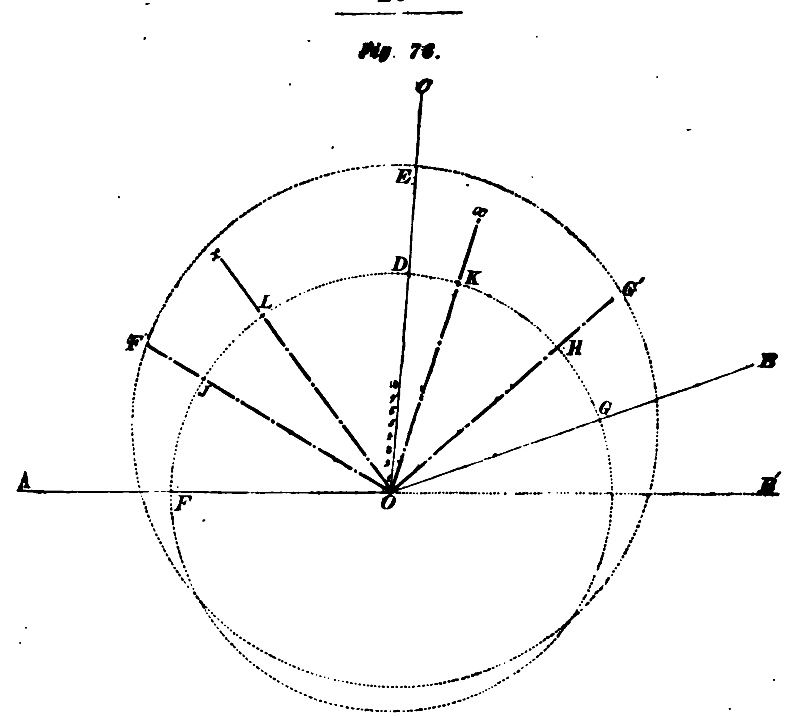
Für jeden Winkel über 90° muss der Bogen halbirt, und von der Hälfte der dritte Theil gesucht werden.

Sollte nach diesem Verfahren irgend ein Winkel, der über 90° ist, also jeder beliebige Winkel bis 180° z. B. der Winkel AOB (Fig. 76) ohne Halbirung in drei gleiche Theile getheilt werden, so geschieht dies auf folgende Art:

Man ziehe aus dem Scheitelpunkte des gegebenen Winkels AOB eine beliebige Linie CO, wodurch dieser in zwei jedoch ungleiche Theile getheilt wird; trage dann auf CO von O aus ein beliebiges Stück $O\,1$ achtmal und $O\,8$ zweimal auf, so dass $O\,8 = D\,8 = DE$ wird; beschreibe ferner aus O mit OD den einen Kreis, und aus 5 mit $E\,5$ einen zweiten; schneide dann den durch E beschriebenen Bogen aus E mit DG in G' und aus demselben Punkte mit DF in F', wodurch man $HG = \frac{1}{3} DG$ und $FJ = \frac{1}{3} DF$ erhält. Wird endlich $HK = FJ$ gemacht, so ist der Bogen $KG = \frac{1}{3} FDG$ und $\measuredangle GOK = \frac{1}{3} FOG = \frac{1}{3} AOB$.

Halbirt man hingegen den gegebenen Winkel und verfährt im Uebrigen wie bei der ersteren dieser Methoden, so kommt man eher zum Ziele und hat auch viel richtigere Resultate.

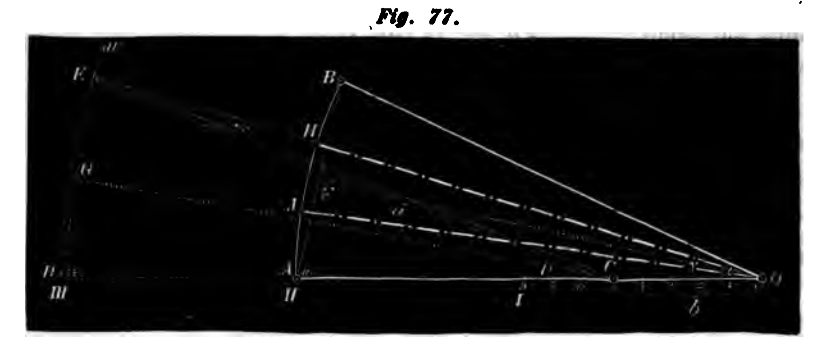
Fig. 76.



Da diese Methode die genaueste ist von denen, vermittelst des Auftragens einer beliebigen Einheit auf dem einen Schenkel, so wollen wir sie durch Rechnung untersuchen und begründen:

Es sei *A O B* (Fig. 77) ein beliebiger Winkel, auf dessen Schenkel *A O* von *O* aus die beliebige Einheit *O* 1 zuerst achtmal, dann die Summe dieser 8 Theile als Einheit wie zuvor noch zweimal aufgetragen ist, wodurch man die Punkte *A* und *D* erhält. Es sei ferner der Punkt 5 oder *C* der Mittelpunkt des Substitutions-

Fig. 77.



bogens Au, auf welchem die Sehne des zu theilenden Winkels AOB aufgetragen wird. — Setzt man nun den $\sphericalangle AOB = \alpha$, $ACE = \beta$, $COE = \gamma$ und $CEO = \delta$, ferner in dem Dreiecke CEO die Seite $CE = a$ und die $CO = b$, so kann man sehr leicht auch hier den Winkel β und dann den Winkel γ als das fragliche $\frac{2\alpha}{3}$ berechnen.

Setzt man $\alpha = 30^0$, so hat man

$$BF = \tfrac{1}{2} AB = BO \sin \tfrac{1}{2}\alpha,$$

und da $BO = 16$

und $\frac{1}{2}\alpha = 15^0$ ist,

so folgt $BF = 16 \,.\, \sin 15^0$,

daher $\log BF = \log 16 + \log \sin 15^0$;

$$\left.\begin{array}{lrl} \text{nun ist} & \log 16 = & 1{\cdot}2041200 \\ \text{und} & \log \sin 15^0 = & 9{\cdot}4129962 - 10 \end{array}\right\}, \text{ welches addirt,}$$

gibt $\log BF = 0{\cdot}6171162$;

diesem entspricht $4{\cdot}1411$.

Man hat daher $DG = BF = 4{\cdot}1411$ und kann somit auch den Winkel β berechnen, denn es ist

$$DG = DC \sin \tfrac{1}{2}\beta,$$

also $\sin \frac{1}{2}\beta = \frac{DG}{DC} = \frac{4{\cdot}1411}{19}$

und $\log \sin \frac{1}{2}\beta = \log DG - \log DC$

$= \log 4{\cdot}1411 - \log 19$;

$$\left.\begin{array}{lrl} \text{nun ist} & \log 4{\cdot}1411 = & 1{\cdot}6171162 - 1 \\ \text{und} & \log 19 = & 1{\cdot}2787536 \end{array}\right\}, \text{ welches abgezogen,}$$

gibt $0{\cdot}3383626 - 1$,

daher $\log \sin \frac{1}{2}\beta = 9{\cdot}3383626 - 10$;

diesem entspricht $12^0\, 35'\, 19{\cdot}8''$.

Man hat somit $\frac{1}{2}\beta = 12^0\, 35'\, 19{\cdot}8''$

und $\beta = 25^0\, 10'\, 39{\cdot}6''$.

Nun kann man auch den Winkel γ als das fragliche Drittel sehr leicht finden, denn es ist in dem Dreiecke ECO die Seite EC, dann auch CO und der von ihnen eingeschlossene Winkel $ECO = 180^0 - \beta$ bekannt; und man hat

$$\operatorname{tang} \frac{\gamma - \delta}{2} = \operatorname{tang} \frac{\gamma + \delta}{2} \cdot \frac{a - b}{a + b} = \operatorname{tang} 12^0\, 35'\, 19{\cdot}8'' \,.\, \frac{19 - 5}{19 + 5}$$

$$= \operatorname{tang} 12^0\, 35'\, 19{\cdot}8'' \,.\, \tfrac{14}{24} = \operatorname{tang} 12^0\, 35'\, 19{\cdot}8'' \,.\, \tfrac{7}{12}.$$

Da nun bei jedem beliebigen Winkel der Bruch $\frac{7}{12} = 0{\cdot}583333\ldots$ vermöge der Construction constant bleibt, so hat man ferner

$$\operatorname{tang}\frac{\gamma-\delta}{2} = \operatorname{tang} 12^{\circ}35'\,19{\cdot}8''\,.\,0{\cdot}5833333,$$

und $$\log\operatorname{tang}\frac{\gamma-\delta}{2} = \log\operatorname{tang} 12^{\circ}35'19{\cdot}8'' + \log 0{\cdot}58333\,;$$

nun ist

$$\left.\begin{array}{lrl} & \log\operatorname{tang} 12^{\circ}35'\,19{\cdot}8'' = & 9.3489311 - 10 \\ \text{und} & \log 0{\cdot}5833333 = & 0{\cdot}7659168 - 1 \end{array}\right\}\text{, welches addirt,}$$

gibt $$10{\cdot}1148479 - 11$$

daher $$\log\operatorname{tang}\frac{\gamma-\delta}{2} = 9{\cdot}1148479 - 10;$$

diesem entspricht $7^{\circ}25'\,19{\cdot}8''$;

es ist daher $$\frac{\gamma-\delta}{2} = 7^{\circ}25'\,19{\cdot}8''$$

und $$\gamma-\delta = 14^{\circ}50'\,39{\cdot}6'',$$

und da $$\gamma+\delta = 25^{\circ}10'\,39{\cdot}6''$$ ist,

so folgt $$2\gamma = 40^{\circ}\ 1'\,19{\cdot}2'',$$

also $$\gamma = 20^{\circ}\ 0'\,39{\cdot}6''$$ als das gefundene $\frac{2\alpha}{3}$ des gegebenen Winkels.

Da also $\frac{2}{3}$ von 30° als der wahre Werth $= 20^{\circ}$ ist, so ist der Fehler $F = 0^{\circ}\,0'\,39{\cdot}6''$.

Setzt man $\alpha = 60^{\circ}$, so findet man auf ähnliche Art den Winkel $\gamma = 40^{\circ}\,3'\,9{\cdot}2''$;

daher der Fehler $F = 0^{\circ}\,3'\,9{\cdot}2''$.

Setzt man $\alpha = 90^{\circ}$, so findet man auf ähnliche Art den Winkel $\gamma = 60^{\circ}\,5'\,33{\cdot}8''$;

daher der Fehler $F = 0^{\circ}\,5'\,33{\cdot}8''$,

ohne dass man den gegebenen Winkel halbirt.

Man sieht also daraus, dass dieses Verfahren für jeden beliebigen Winkel bis 90° sehr genau ist, und daher auch bei aussergewöhnlichen Zeichnungen angewendet werden kann. Rückt man mit dem Winkel bei der Berechnung etwas weiter über 90° hinaus, so findet man hier wohl, dass der Fehler sehr rasch wächst, und zwar so, dass er für $\alpha = 120^{\circ}$ den Fehler $F = 1^{\circ}18'\,38''$ gibt. Dessenungeachtet kann man jeden Winkel, der über 90° ist, auf Minuten oder auch auf Secunden genau dritteln, je nachdem man ihn zuerst in 4 oder in 8 gleiche Theile theilt, zumal da die letzte-

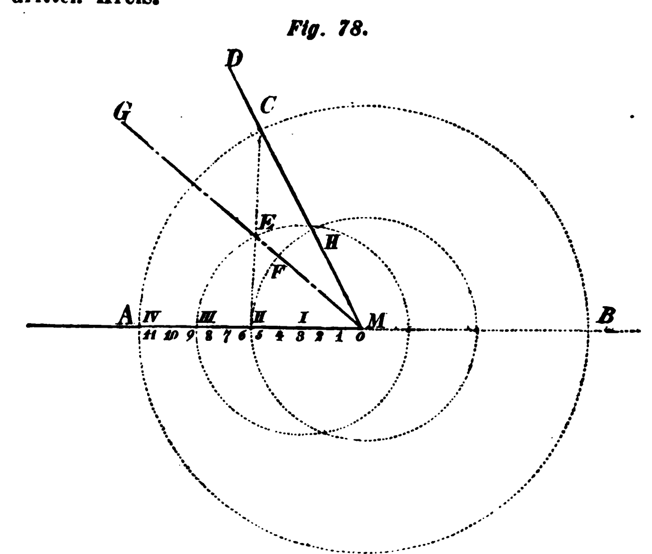
ren zwei Theilungen nach unserem Verfahren sehr leicht ausgeführt werden können.

XVII. Trisections-Methode

Noch ein anderes Verfahren mittels des Auftragens einer beliebigen Einheit auf dem einen Schenkel ist das nachfolgende:

Man trage auf einer Geraden, hier auf *AM* (Fig. 78), von *M* aus eine beliebige Einheit eilfmal auf, theile überdiess die so erhaltene Linie *AM* in zwei gleiche Theile, beschreibe aus *M* mit $\frac{1}{2}$ *AM* den einen, und aus eben diesem Punkte mit *AM* einen zweiten Kreis, setze in 3 ein, eröffne bis *III* und beschreibe mit *III* 3 einen dritten Kreis.

Fig. 78.

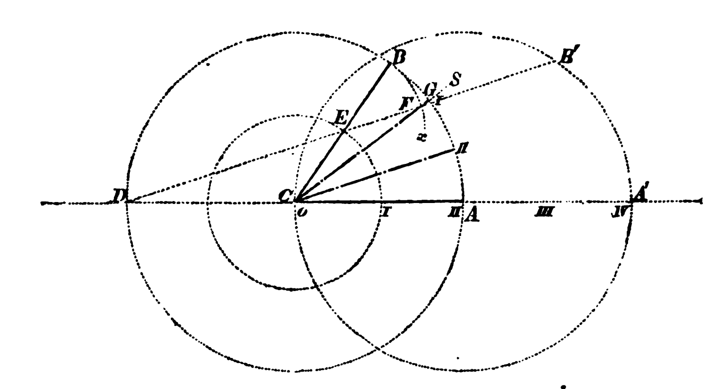


Soll nun z. B. der Winkel *AMD* in drei gleiche Theile getheilt werden, so verbinde man *C* mit *II* durch eine Gerade und führe aus dem Mittelpunkte *M* durch den so erfolgten Durchschnittspunkt *E* die *MG*, wodurch $\sphericalangle$ *DMG* = $\frac{1}{3}$ *AMD* erfolgt.

XVIII. Trisections-Methode.

Es sei *ACB* (Fig. 79) der gegebene Winkel und *AB* der ihm entsprechende Bogen. Man verlängere den Schenkel *AC* beiderseits, trage vom Scheitelpunkte *C* angefangen auf dessen einem Schenkel, hier auf *CA'*, vier gleiche Theile auf, beschreibe aus *C*

Fig 79.



mit CI den einen und mit CII einen zweiten Kreis; alsdann beschreibe man auch aus II mit CII einen dritten Kreis, mache $A'B' = AB$ und verbinde B' mit D durch eine Gerade. Nun beschreibe man aus dem Durchschnittspunkte E mit $BE = CE$ den Bogen Bx, welcher die $B'D$ in F schneidet. Zieht man zuletzt aus dem Scheitelpunkte C durch den zuvor erhaltenen Punkt F die Gerade CS, so dass der Bogen AB bei G geschnitten wird, so erfolgt arc BG annähernd als der dritte Theil von AB, und ebenso der Winkel $BCG = \frac{1}{3} ACB$.

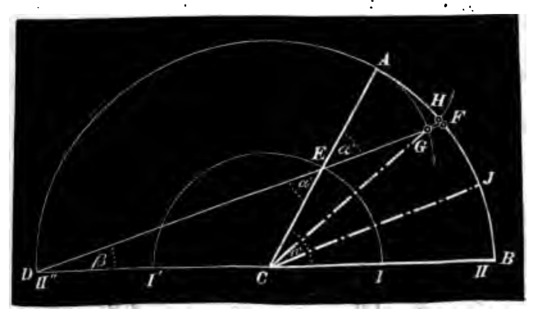
XIX. Trisections-Methode.

(Zweikreis-Methode).

Viel genauer und einfacher ist die nachfolgende Methode, welche wir Zweikreis-Methode nennen wollen, weil sie mittels zweier Kreise bewerkstelliget wird.



Fig. 80.



Um irgend einen Winkel, z. B. den Winkel ACB (Fig. 80), in drei gleiche Theile zu theilen, verlängere man BC über C hinaus, nehme eine beliebige Einheit auf dem einen Schenkel, hier auf BC an, und trage sie darauf von dem Scheitelpunkte C aus 2mal auf; nun beschreibe

man aus C mit CI und CII die zwei Halbkreise BAD und IEI', führe aus D durch den Punkt E eine Gerade, bis der Bogen AB in F geschnitten wird, und schneide die Linie DF aus E mit AE in G ein, wodurch man die Strecke AG d. i. die Sehne des Bogens AG als die Sehne des zu suchenden Drittelbogens erhält. — Beschreibt man nun aus dem Punkte A mit dem Halbmesser $= AG$ einen Bogen so, dass der gegebene Bogen AB in H geschnitten wird, so ist

$$\text{arc } AH = \tfrac{1}{3} AB$$

und $$\sphericalangle ACH = \tfrac{1}{3} ACB.$$

Dieses Verfahren ist wohl auch nur näherungsweise, allein sehr einfach und leicht zu merken; wir wollen es daher auch einer näheren Betrachtung würdigen, um zu sehen, in wie ferne es richtig ist, und bis zu welchem Winkel man sich bei praktischen Arbeiten darauf verlassen kann.

Die Rechnung wird wohl nicht so schwierig sein, weil man die hierzu erforderlichen Stücke theils als bekannt annehmen, theils sehr leicht berechnen kann; wie wir sogleich sehen werden.

Setzen wir der Kürze wegen

$$AC = BC = CD = 1' = a,$$

so ist $$CE = AE = \tfrac{1}{2} = 0{\cdot}5 = b.$$

Wir können somit den Winkel CED sehr leicht mittels der bekannten Formel

$$\text{tang}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \text{tang}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \frac{a-b}{a+b}$$

finden.

Nimmt man nun an, der Winkel $w = 45^0$, so findet man, wenn der Winkel

$$DEC = \alpha$$

und $$\sphericalangle EDC = \beta \text{ gesetzt wird,}$$

$$w = \alpha + \beta = 45^0,$$

also $$\frac{w}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{45}{2};$$

und da $DC = 1 = a$ und $CE = \frac{1}{2} = 0{\cdot}5 = b$ gesetzt wurde,

$$a + b = 1{\cdot}5 \quad \text{und} \quad a - b = 0{\cdot}5;$$

man hat daher durch Substitution in die obige Formel

$$\text{tang}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \text{tang}\,\frac{45}{2} \cdot \frac{0{\cdot}5}{1{\cdot}5} = \text{tang}\,22^0\,30' \cdot \frac{0{\cdot}5}{1{\cdot}5},$$

daher auch

$$\log \text{tang} \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \log \text{tang}\, 22^0 30' + \log 0{\cdot}5 - \log 1{\cdot}5\,;$$

nun ist $\log \text{tang}\, 22^0 30' = 9{\cdot}6172243 - 10$
und $\log 0{\cdot}5 = 0{\cdot}6989700 - 1$, welches addirt,
gibt $10{\cdot}3161943 - 11$
ferner ist $\log 1{\cdot}5 = 0{\cdot}1760913$, welches subtrahirt,
gibt $10{\cdot}1401030 - 11$,

also $\log \text{tang} \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = 9{\cdot}1401030 - 10$;

diesem entspricht $7^0\, 51'\, 40''$.

Es ist also $\frac{\alpha - \beta}{2} = 7^0\, 51'\, 40''$,

daher $\alpha - \beta = 15^0\, 43'\, 20''$,
und da $\alpha + \beta = 45^0\ 0'\ 0''$ ist, so hat man durch Addition $2\,\alpha = 60^0\, 43'\, 20''$,
daraus $\alpha = 30^0\, 21'\, 40''$
und $\frac{\alpha}{2} = 15^0\, 10'\, 50''$.

Da ferner nach der Construction $AE = CE$ und $EG = AE$, also das Dreieck AEG gleichschenkelig ist, in welchem der Winkel an der Spitze d. i. $\alpha' = \alpha$ bekannt ist, so können wir daraus sehr leicht das angebliche Drittel berechnen; denn wird die hier nur gedachte Sehne $AH = AG$ halbirt, so finden wir:

$$\frac{AG}{2} = AE \sin \frac{\alpha'}{2} = 0{\cdot}5 \times \sin 15^0\, 10'\, 50'',$$

daher $\log \frac{AG}{2} = \log 0{\cdot}5 + \log \sin 15^0\, 10'\, 15''$;

nun ist aber $\log 0{\cdot}5 = 0{\cdot}6989700 - 1$
und $\log \sin 15^0\, 10'\, 50'' = 9{\cdot}4180723 - 10$, welches addirt,
gibt $10{\cdot}1170423 - 11$,

daher $\log \frac{AG}{2} = 0{\cdot}1170423 - 1$;

diesem entspricht $0{\cdot}130930$,

somit ist $\frac{AG}{2} = 0{\cdot}130930$,

folglich $AG = 0{\cdot}261860$.

Da nun nach der Sehnentafel für $\frac{45^0}{3}$ die Sehne $= 0{\cdot}2610524$ ist, so folgt, wenn man diese Werthe mit einander vergleicht und von einander abzieht, also

$$0{\cdot}2618600 - 0{\cdot}2610524 = 0{\cdot}0008076.$$

Somit ist die gefundene Sehne des verlangten Drittels um 0·0008076 zu gross im Längenmass.

Will man nun diesen Fehler im Bogenmasse finden, so hat man, da

$$AH = AG \text{ und } \frac{AH}{2} = \frac{AG}{2} \text{ ist,}$$

$$\frac{AH}{2} = AC \sin\frac{x}{2},$$

wenn der dem abgeschnittenen Bogen AH entsprechende Winkel mit x bezeichnet wird.

$$0{\cdot}130930 = 1 \,.\, \sin\frac{x}{2},$$

also $$\sin\frac{x}{2} = 0{\cdot}130930,$$

daher $$\log\sin\frac{x}{2} = \log 0{\cdot}130930;$$

nun ist $$\log 0{\cdot}130930 = 0{\cdot}1170423 - 1,$$

daher $$\log\sin\frac{x}{2} = 9{\cdot}1170423 - 10;$$

diesem entspricht $$7^0\,31'\,24''.$$

Also ist $$\frac{x}{2} = 7^0\,31'\,24'',$$

folglich $$x = 15^0\;\;2'48'';$$

da nun $$45^0 : 3 = 15^0\;\;0'\;\;0'' \text{ ist,}$$

so hat man, wenn diese zwei letzten Werthe mit einander verglichen und von einander abgezogen werden, den Fehler

$$F = 0^0\,2'\,48''.$$

Setzt man $w = 30^0$ und führt die Rechnung wie oben durch, so findet man die Sehne des dritten Theiles von dem gegebenen Winkel im Längenmasse, also

$$AG = AH = 0{\cdot}1745400,$$

und da der wahre Werth derselben $= 0{\cdot}1743114$ nach den Sehnentafeln ist, so hat man, wenn diese Werthe von einander abgezogen werden, den Fehler

$$F = 0{\cdot}0002286;$$

oder im Gradmasse ausgedrückt, ist der gefundene Winkel

$$x = 10^0\,0'\,46'',$$

also ist für die Dreitheilung des Winkels $w = 30^0$ der gefundene Fehler $$F = 0^0\,0'\,46''.$$

Setzt man $w = 60^{0}$, so findet man eben so nach der Rechnung wie oben

$$AG = AH = 0{\cdot}3493840,$$

und da nach der Sehnentafel

$$AG = AH = 0{\cdot}3472964 \text{ ist,}$$

so hat man den Fehler $F = 0{\cdot}0020376,$

welches im Gradmasse ausgedrückt

$$\frac{w}{3} = 0^{0}\,7'\,14'' \text{ gibt.}$$

Man sieht also daraus, dass dieses Verfahren eine praktische Genauigkeit hat, und dass man nach diesem jeden beliebigen Winkel, auch über 90^{0}, triseciren kann, sobald er zuvor halbirt, und noch genauer, sobald er in vier gleiche Theile getheilt wird. Es kann daher dieses Verfahren beim praktischen Zeichnen mit Vortheil angewendet werden, zumal da es sehr einfach und sehr leicht zu merken ist.

Will man nun einen Winkel, der über 60^{0} oder über 90^{0} ist, der Genauigkeit wegen zuerst halbiren, so muss die Construction so vorgenommen werden, dass man die Theilungspunkte so wie die Theilungslinien an ihrer gehörigen Stelle erhält; man wird daher in diesem Falle auf folgende Art verfahren:

Es sei ACB (Fig. 81) der zu theilende Winkel.

Fig. 81.

Man nehme eine beliebige Einheit auf dem einen Schenkel, hier auf BC, das Stück CI an, trage es auf demselben zweimal auf, wodurch man den Punkt B erhält; oder was dasselbe ist, man halbire BC in I, beschreibe dann aus C mit $CII = BC$ einen Kreis, ferner mit CI einen Bogen II' und halbire den letzteren durch CH; nun verlängere man lie beiden Schenkel des gegebenen Winkels über den Scheitelpunkt iinaus bis zu der Peripherie des Kreises, führe aus den so erfol-

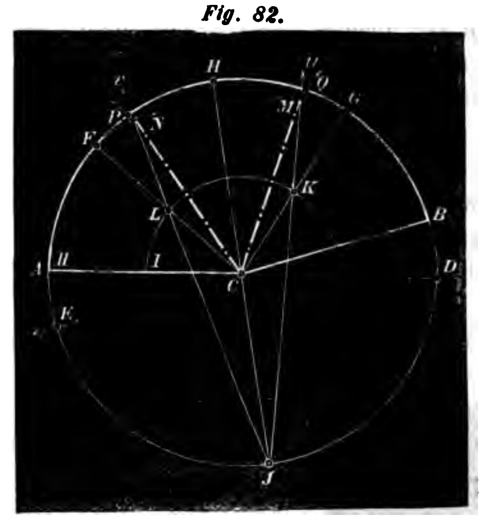
ten Punkten *D* und *E* durch *C'* die Geraden *Du* und *Ev*, beschreibe aus *C'* mit $CH = CC'$ den Bogen *xy*, fasse $HF = HG$ in Zirkel und durchschneide damit aus *H* den Bogen *AB* in *J* und *K*, wodurch die Dreitheilung des Bogens, also $AJ = JK = KB = \frac{1}{3} AB$ erfolgt, und wenn man *J* so wie *K* mit dem Scheitelpunkte *C* durch Gerade verbindet, auch

$$\measuredangle ACJ = JCK = KCB = \frac{1}{3} ACB$$

erhalten wird.

Sehr interessant ist dieses Verfahren, wenn der gegebene Winkel zuerst in vier gleiche Theile getheilt wird. Soll z. B. der Winkel *ACB* (Fig. 82), der nahe an 180^0 ist, in drei gleiche Theile getheilt werden, so ergänze man dessen Bogen *AB* zu einem Kreise, halbire dessen Schenkel *AC* in *I*, beschreibe aus dem Mittelpunkte *C* durch den Halbirungspunkt *I* einen Kreis, und theile den gegebenen Bogen und Winkel in vier gleiche Theile. Nun verlängere man die Halbirungslinie *CH* über *C* hinaus bis zu dem Punkte *J* in der Peripherie, führe aus *J* durch *L* und *K* die Geraden *Ju* und *Jv*, beschreibe aus *K* und *L* mit $FL = GK = CL$ die zwei Bögen *FN* und *GM*, welche die *Ju* und *Jv* in *M* und *N* schneiden, und übertrage die *FN* und *GM* aus *F* und *G* auf den Bogen *AB*, wodurch $AP = PQ = QB = \frac{1}{3} AB$, somit auch, wenn die *CP* und *CQ* gezogen wird,

Fig. 82.



$$\measuredangle ACP = PCQ = QCB = \frac{1}{3} ACB$$

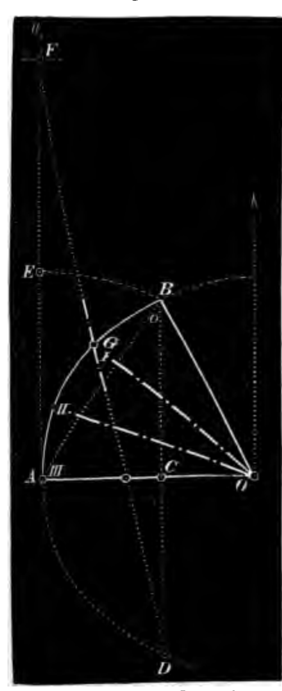
erfolgt.

Auf diese Art wird jeder Winkel bis etwa 120 Grad auf Secunden, jene aber von 120 bis 180 Grad auf Minuten genau gedrittelt.

XX. Trisections-Methode.

Es sei AOB (Fig. 83) der zu theilende Winkel und AB der ihm entsprechende Bogen. Man verfahre bei der Dreitheilung folgender Massen:

Fig. 83.



Man fälle von dem Endpunkte des einen Schenkels eine Senkrechte auf den zweiten Schenkel, also hier von B die $BC \perp AO$, und mache die Verlängerung dieser Senkrechten d. i. $CD = BC$, errichte in dem Endpunkte des zweiten Schenkels d. i. in A eine Vertikale, und mache sie gleich der doppelten Sehne des gegebenen Winkels, also $Au \perp AO$ in A, und $AF = 2AB$. Wird nun der Punkt D mit dem Punkte F durch eine Gerade verbunden, so wird hierdurch der Bogen AB in G so getheilt, dass arc $BG = \frac{1}{3} AB$, also näherungsweise der dritte Theil von AB abgeschnitten wird.

Aus der Construction sieht man leicht ein, dass man, um schneller zum Ziele zu gelangen, die beiden Hilfslinien Au und BD gewisser Massen gleichzeitig ziehen muss, und alsdann erst die eine dieser Linien gleich dem doppelten Sinus und die andere gleich der doppelten Sehne macht u. s. w.

Dieses Verfahren kann mit Vortheil bei jedem beliebigen Winkel bis über 60° angewendet werden. Ist der gegebene Winkel nahe an 90° oder bedeutend darüber, so muss er halbirt, sodann mit der Hälfte die Dreitheilung vorgenommen werden.

XXI. Trisections-Methode.

Es sei AOB (Fig. 84) der zu theilende Winkel, welcher nahe an 90° ist.

Man ziehe die Sehne AB, theile sie in drei gleiche Theile, so dass hier $AC = CD = BD$ ist, errichte in jedem der zwei Theilungspunkte C und D eine Normale auf die Sehne AB und

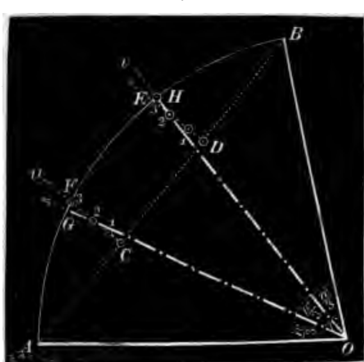


Fig. 84.

theile jedes der zwei zwischen dem Bogen und der Sehne enthaltenen Stücke dieser Normalen, d. i. *CF* so wie *DE* in drei gleiche Theile. Wird alsdann aus dem Scheitelpunkte *O* durch den zweiten Theilungspunkt einer jeden dieser Normalen eine Gerade bis zu dem Bogen *AB* gezogen, so erhält man die zwei Theilungspunkte *G* und *H*, wodurch *AB* in drei gleiche Theile getheilt wird, so dass

$$\text{arc } AG = GH = BH = \tfrac{1}{3} AB$$

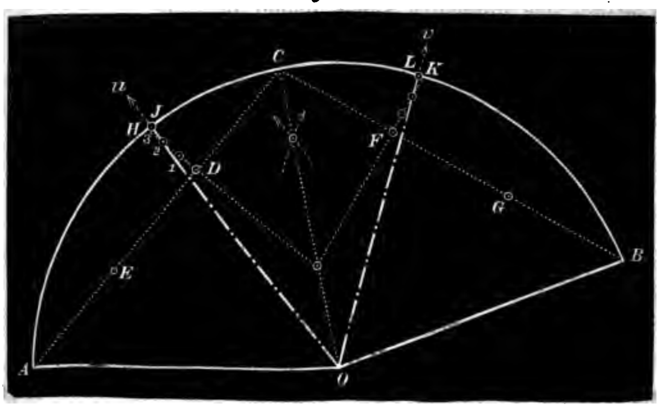
und

$$\measuredangle\ AOG = GOH = HOB = \tfrac{1}{3} AOB \text{ ist.}$$

Bei einem kleinen Winkel, der etwa unter 30° ist, fallen diese Hilfs-Normalen mit den Theilungslinien desto mehr zusammen, je kleiner dieser Winkel angenommen wird.

Bei einem Winkel von etwa 135° ist die Differenz zwischen den richtigen Theilungslinien und den auf die obige Art gefundenen kaum sichtbar, doch wächst der Fehler über diesen Winkel hinaus sehr rasch und wird bei dem Winkel von 180° nahe 1°, wie sich diess auch durch Rechnung nachweisen lässt. Doch kann man diesen Fehler vermeiden, sobald man den gegebenen Winkel, wie diess Fig. 85 zeigt, einmal halbirt. Bei diesem Winkel, der

Fig. 85.



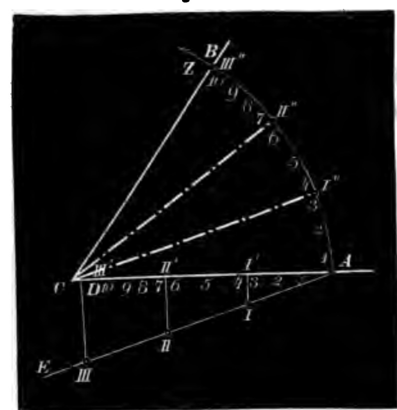
etwa 160° beträgt, ist der Fehler bei einmaligem Halbiren noch sehr gering. Bei der Ausführung der Theilung nach diesem Verfahren braucht man nur die Sehne des halben Winkels zu ziehen und von der einen Hälfte des Bogens die Dreitheilung zu suchen; oder man zieht für jede Hälfte die Sehne und verfährt, wie die Figur zeigt.

XXII. Trisections-Methode.

Diese Methode ist wohl nicht so einfach, allein desshalb wichtig, weil man nach dieser die Polysection eines beliebigen Winkels vornehmen kann, wie wir diess später sehen werden.

Dieses Verfahren besteht darin, dass man den Bogen des gegebenen Winkels in eine Gerade verwandelt, wobei man auf die nachfolgende Art verfährt:

Fig. 86.



Es sei ACB (Fig. 86) der gegebene Winkel. Man nehme auf dem gegebenen Bogen ein beliebiges kleines Stück als Einheit an und trage solche auf diesem Bogen so oft auf, als es geht; hierauf trage man dieselbe Einheit auch auf dem einen Schenkel des gegebenen Winkels, hier auf AC, eben so oftmal auf und allenfalls auch den Rest, wenn solcher auf dem Bogen sich ergeben hat, wodurch man auf dem Schenkel AC das Stück AD = der Länge des Bogens AB erhält. Nun wird das Stück AD in drei gleiche Theile getheilt (hier geometrisch mittels der Geraden AE), wo dann ein solcher Theil AI' sich auf dem gegebenen Bogen AB dreimal auftragen lässt.

Je genauer nun der gegebene Bogen in eine Gerade verwandelt wird, desto genauer wird auch der dritte Theil erfolgen.

XXIII. Trisections-Methode.

Bei diesem Verfahren wird zuerst die Trisections-Linie construirt. Man zeichne zwei Linien senkrecht auf einander, also hier

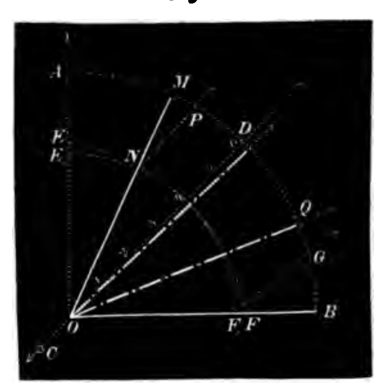


Fig. 87.

$AO \perp BO$ (Fig. 87), halbire den so entstandenen rechten Winkel AOB, ziehe die Halbirungslinie DO und verlängere sie über den Scheitelpunkt hinaus. Alsdann nehme man auf der Halbirungslinie ein beliebiges Stück $O1$ an und trage es auf derselben vom Scheitelpunkte aus 6mal und auf ihrer Verlängerung über den Scheitelpunkt 1mal auf; endlich beschreibe man aus dem Scheitelpunkte O mit dem Halbmesser $= O6$ den Bogen AB und aus dem Punkte C mit $C4$ den Bogen EF, so ist EF der Trisections-Bogen.

Mittels dieses Trisections - Bogens wird ein Winkel auf die nachfolgende Art in drei gleiche Theile getheilt:

Es sei der Winkel BOM in drei gleiche Theile zu theilen. Man ziehe zu diesem Behufe die $FG \parallel DO$, so ist der dadurch abgeschnittene Bogen $BG = \frac{1}{3} BD$, d. h. der dritte Theil des Bogens von 45°. Wird ferner aus N die $NP \parallel DO$ gezogen, so ist der dadurch abgeschnittene Bogen $MP = \frac{1}{3} MD$. Da also

$$\text{arc } BG = \tfrac{1}{3} BD,$$

$$\text{arc } MP = \tfrac{1}{3} DM$$

und $\quad \text{arc } DM + BD = BM$ ist,

so ist $\quad \text{arc } BG + MP = \frac{1}{3}(BD + DM)$;

es ist aber $\quad \text{arc } BD + DM = BM$,

also ist $\quad \text{arc } BG + MP = \frac{1}{3} BM$ (annähernd).

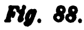
Wird nun $GQ = MP$ gemacht, so lässt sich BQ auf BM dreimal auftragen.

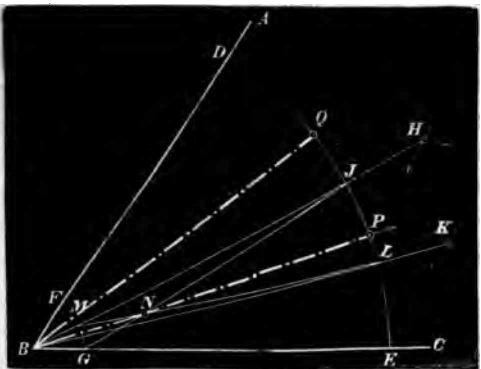
Diese Methode ist nur näherungsweise, jedoch sehr genau und wegen ihrer Einfachheit sehr empfehlbar.

XXIV. Trisections-Methode.

Ein äusserst interessantes Verfahren ist folgendes:

Es sei ABC (Fig. 88) der zu theilende Winkel. Man beschreibe mit einem beliebigen Halbmesser aus B den Bogen DE, sodann mit einem bedeutend kleineren Halbmesser (z. B. mit $BF = \frac{1}{8}$ oder $= \frac{1}{10}$ oder $\frac{1}{12} BD$) den Bogen FG, halbire die beiden





Bogen durch BH und deren eine Hälfte durch BK. Wird nun G mit J und L mit M durch Gerade verbunden, so ist ihr Durchschnittspunkt, d. i. der Punkt N ein Trisectionspunkt, und aus B durch N eine Gerade geführt gibt die verlangte Theilungslinie.

Dieser Punkt wird desto genauer erhalten, je weiter die zwei Bogen DE und FG aus einander sind; also je grösser die Differenz der Halbmesser ist.

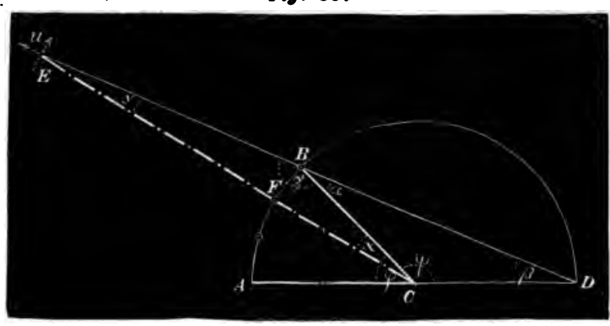
Man kann nach diesem Verfahren jeden beliebigen Winkel bis 90^0 mit einer ausserordentlichen Genauigkeit in drei gleiche Theile theilen; ist aber der Winkel grösser als 90^0 also auch nahe an 180^0, so muss von dem gegebenen Winkel zuerst das mittlere Viertel und Achtel gesucht werden, welches nach unserer Bisections-Methode sehr leicht auszuführen ist.

XXV. Trisections - Methode.

Ein höchst einfaches Verfahren einen beliebigen Winkel in drei gleiche Theile zu theilen, ist folgendes:

Es sei der Winkel ACB (Fig. 89) in drei gleiche Theile zu theilen. Man verlängere AC über C hinaus, mache die Verlänge-

Fig. 89.



rung $CD = AC$, lege durch die zwei Punkte B und D die Gerade DBu, mache ferner $BE = AD = 2AC$ und verbinde E

mit C, so ist der Bogen $BF = \frac{AB}{3}$ und der Winkel $BCF = \frac{1}{3} ACB$.

Da diese Construction **höchst einfach, zugleich aber auch so ziemlich richtige Resultate gibt, so wollen wir sie einer näheren** mathematischen Betrachtung **unterziehen.**

Setzt man hier $AC = BC = 1$, so ist auch $CD = 1$, somit $AD = BE = 2$; es sei ferner der gegebene Winkel $ACB = \varphi = \alpha + \beta$, somit ist auch der Winkel ψ und daher auch γ bekannt, indem $\alpha = \beta$ ist.

Um nun den Winkel $x = \frac{1}{3} ACB$ zu finden, braucht man nur das Dreieck CBE aufzulösen, wozu die zwei Seiten BC, BE und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel γ gegeben ist, für welchen Fall man die einfachste bekannte Formel

$$\text{tang}\left(\frac{x-y}{2}\right) = \text{tang}\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \frac{a-b}{a+b}$$

anwendet.

Da also nach der gegebenen Construction das Verhältniss der zwei Seiten constant bleibt, nämlich $BC : BE = 1 : 2$, so hat man, wenn diese Werthe in die obige Formel gehörig substituirt werden:

$$\text{tang}\left(\frac{x-y}{2}\right) = \text{tang}\,(x+y)\frac{a-b}{a+b} = \text{tang}\left(\frac{x+y}{2}\right)\frac{2-1}{2+1}$$

$$= \text{tang}\left(\frac{x+y}{2}\right)\frac{1}{3} = \text{tang}\left(\frac{x+y}{2}\right) 0{\cdot}3333\ldots$$

Man braucht daher nur dem Winkel φ nach und nach verschiedene Werthe zu geben, wo man dann vermittelst dieser Formel die Differenzen und aus diesen, so wie aus der bekannten Summe das x sehr leicht herausfindet.

Es sei nun $\varphi = 10^0$, so ist

$$\varphi = \alpha + \beta = 2\alpha = 2\beta = 10^0,$$

folglich $$\frac{\varphi}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} = \alpha = \beta = 5^0;$$

und da $$\alpha = x + y = 5^0 \text{ ist,}$$

so hat man $$\frac{\alpha}{2} = \frac{x+y}{2} = 2^0\,30';$$

folglich $$\text{tang}\left(\frac{x-y}{2}\right) = \text{tang}\,2^0\,30' \times 0{\cdot}3333333$$

und $$\log\text{tang}\left(\frac{x-y}{2}\right) = \log\text{tang}\,2^0 30' + \log 0{\cdot}3333333;$$

nun ist $\log \tang 2^0 30' = 8{\cdot}6400931 - 10$
und $\log 0{\cdot}3333333 = 0{\cdot}5228744 - 1$, welches addirt,
gibt $9{\cdot}1629718 - 11$,

somit $\log \tang \left(\frac{x-y}{2}\right) = 8{\cdot}1629718 - 10$;
diesem entspricht: $= 0^0 50' 5''$.

Es ist somit $\frac{x-y}{2} = 0^0 50' 5''$,
daher $x - y = 1^0 40' 10''$
und da $x + y = 5^0 0' 0''$,
so hat man $2x = 6^0 40' 10''$,
somit $x = 3^0 20' 5''$.

Da also das gefundene Drittel des gegebenen Winkels, also
$x = 3^0 20' 5''$
und der wahre Werth $= 3^0 20' 0''$ ist,
so ist der Fehler $F = 0^0 0' 5''$,
also ein äusserst geringer Fehler.

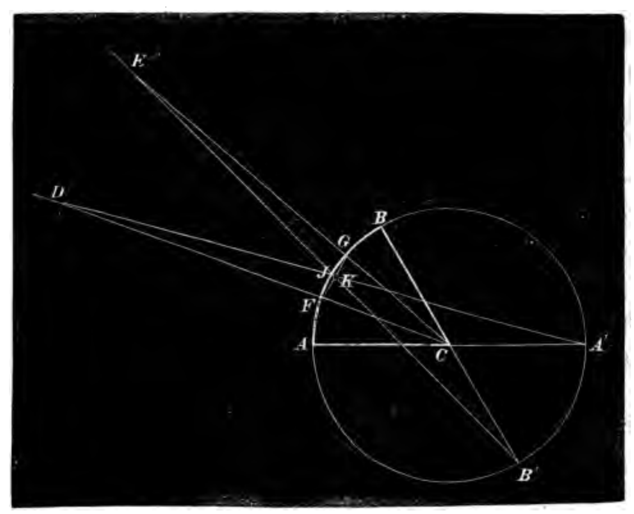
Wird also diese Untersuchung fortgesetzt, indem man für den Winkel φ nach und nach die Werthe etwa von 10 zu 10 Grade substituirt, so findet man, dass
für $\varphi = 20^0$ der Werth für $x = 6^0 40' 13''$,
von welchem Werthe der wahre $x_w = 6^0 40' 0''$
abgezogen, gibt den Fehler $F = 0^0 0' 13''$;
also ebenfalls ein äusserst geringer Fehler.
Für $\varphi = 30^0$ ist der Werth für $x = 10^0 0' 45''$,
von welchem Werthe der wahre $x_w = 10^0 0' 0''$
abgezogen, gibt den Fehler $F = 0^0 0' 45''$.
Für $\varphi = 40^0$ ist der Werth für $x = 13^0 21' 49''$,
von welchem Werthe der wahre $x_w = 13^0 20' 0''$
abgezogen, gibt den Fehler $F = 0^0 1' 49''$.
Für $\varphi = 50^0$ ist $x = 16^0 43' 34''$,
wovon $x_w = 16^0 40' 0''$
abgezogen, gibt $F = 0^0 3' 34''$.
Für $\varphi = 60^0$ ist $x = 20^0 6' 14''$,
somit der Fehler $F = 0^0 6' 14''$.
Für $\varphi = 70^0$ ist $x = 23^0 29' 59''$,
somit $F = 0^0 9' 59''$.

Für $\varphi = 80^0$ ist $x = 26^0 55' \ 3''$,
daher $F = 0^0 15' \ 3''$.
Für $\varphi = 90^0$ ist $x = 30^0 21' 40''$,
und folglich $F = 0^0 21' 40''$.

Wie man aus dieser schematischen Darstellung sieht, ist der Fehler desto grösser, je grösser der Winkel angenommen wird, so dass er bei einem Winkel von 90^0 gleich $\frac{1}{3}$ Grad beträgt; dessen ungeachtet ist diese Methode eine vorzügliche zu nennen, weil sie höchst einfach ist, und weil man nach dieser vermittelst der Halbirung des gegebenen Winkels, oder vermittelst Zerlegung desselben in zwei ungleiche Theile dennoch die Dreitheilung auch bei einem Winkel, der über 90^0 ist, auf Secunden genau vollführen kann, wie diess aus dem nachfolgenden Beispiele leicht zu ersehen ist.

Soll irgend ein Winkel, der nahe an 90^0 ist, also z. B. der Winkel $ACB = w = 80^0$ (Fig. 90), in drei gleiche Theile ge-

Fig. 90.



theilt werden, so nehme man auf dem diesem Winkel entsprechenden Bogen AB irgend einen Punkt J mehr oder weniger in der Mitte an, ergänze den Bogen zu einem Kreise und verlängere die beiden Schenkel über den Scheitelpunkt hinaus bis zu der Peripherie; alsdann führe man aus den so erfolgten Punkten A' und B' durch den angenommenen Punkt J Gerade und schneide jede derselben aus J

mit dem Halbmesser gleich dem Durchmesser AA' ein; endlich verbinde man D und E mit C, so ist der inzwischen abgeschnittene Bogen $FG = \frac{1}{3} AB$, wie zuvor näherungsweise. Denn es ist nach der obigen Construction

$$\left.\begin{array}{ll} \text{arc } FJ = \frac{1}{3} AJ \\ \text{und arc } GJ = \frac{1}{3} BJ \end{array}\right\} \text{näherungsweise}$$

somit arc $FJ + GJ = \frac{1}{3}(AJ + BJ)$,

daher arc $FG = \frac{1}{3} AB$ näherungsweise.

Wird der Winkel geometrisch halbirt, so ist der Fehler nach der obigen Rechnung für jede Hälfte $F = 0^\circ 1' 49''$, somit $2F = 0^\circ 3' 38''$; dieser wird jedoch nicht so gross, wenn man nicht beide hier zusammenhängende Drittel auf einmal, sondern die ihnen entsprechende halbe Sehne abnimmt; denn denkt man sich F mit J, dann J mit G und F mit G durch Gerade verbunden, so entsteht hier ein Dreieck, und da in jedem Dreiecke die Summe zweier Seiten stets grösser ist als die dritte Seite, folglich wird auch FG kleiner sein als $FJ + GJ$; es gleicht sich daher der obige Fehler dadurch aus, indem FK als die Sehne des $\frac{1}{6}$ Winkels annimmt und diese aufträgt.

Denn nach der obigen Dreitheilung ist

$$FJ = \frac{1}{3} AJ = \frac{1}{6} AB = 13^\circ 21' 49''$$

und der Sinus für $\frac{1}{2} FJ = 6^\circ 40' 54''$,

wofür nach der Sinustafel ein Längenmass und zwar

für $6^\circ = 0{\cdot}1045$

für $40' = 0{\cdot}0116$

für $54'' = 0{\cdot}0003$

daher die Sehne für $6^\circ 40' 54'' = 0{\cdot}1164$, entspricht;

daher $FJ = 13^\circ 21' 49'' = 0{\cdot}2328$;

es ist aber der Sinus für den ganzen Winkel $FCJ = GCJ$, also für

$$13^\circ 21' 49'' = \begin{cases} \sin 13^\circ = 0{\cdot}2250 \\ 21' = 0{\cdot}0061 \\ 49'' = 0{\cdot}0002 \end{cases}$$

$$13^\circ 21' 49'' = 0{\cdot}2313 = FK,$$

somit $FJ - FK = 0{\cdot}2328 - 0{\cdot}2313 = 0{\cdot}0015$;

diesem entspricht nach den Tafeln ein Winkel von $0^\circ 5' 0''$, also

$$0{\cdot}0015 = 0^\circ 5' 0'';$$

wird nun von diesem Werthe der obige Fehler abgezogen, so hat man

$$\begin{array}{r} 0^\circ 4' 60'' \\ 0^\circ 3' 38'', \end{array}$$

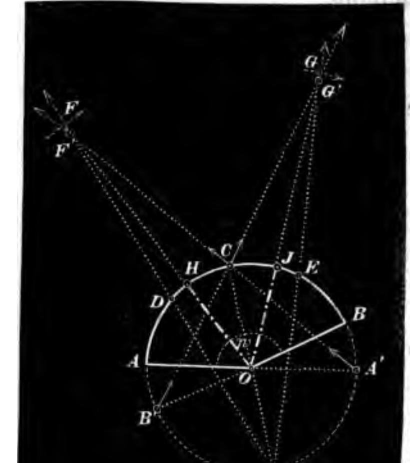
somit die Differenz $D = 0^\circ 1' 22''$.

Es ist also der Fehler bei einem Winkel von 80° ungefähr gleich der Dicke eines feinen Striches, wenn dieser Winkel zuerst halbirt wird, während man nach der obigen Methode bei demselben Winkel ohne Halbirung einen bedeutend grösseren Fehler begeht.

Es ist daher viel vortheilhafter, bei diesem Verfahren den gegebenen Winkel, wenn er nahe an 90°, oder auch darüber ist, zuerst zu halbiren; die Halbirung soll jedoch auf die Art des Verfassers vorgenommen werden, weil man nach derselben die allenfalls zur Bisection erforderlichen Stücke zugleich auch für die Trisection benützen kann; es muss z. B. die Linie AC über C hinaus verlängert und die Verlängerung $A'C = AC$ gemacht werden, um den Punkt A' zu erhalten, wo dann $CJ \parallel A'B$ gezogen, den Winkel ACB halbirt; der Punkt A' muss aber auch wegen der Dreitheilung bestimmt werden. Somit wird die Construction viel einfacher und richtiger, zugleich aber auch mit dem Vortheile, dass man die Theilungspunkte schon an Ort und Stelle hat, wo sie sein sollen.

Handelt es sich jedoch nur um den dritten Theil, so kommt man viel schneller und eben so richtig zum Ziele, wenn man den Winkel nur nach dem Augenmasse halbirt u. s. w. wie zuvor. Der Fehler wird auch dann nur sehr gering sein, weil auch da nur die halbe dritte Seite des Dreieckes genommen wird.

Fig. 91.



Ist der Winkel über 90°, also auch nahe an 180°, so kann man ihn eben so genau triseciren, wenn man ihn zuerst halbirt, oder auch, indem man ihn zuerst in vier gleiche Theile theilt, und dann den dritten Theil von dem Ganzen so sucht, wie diess Fig. 91 zeigt. Ist nämlich $\angle AOB$ der zu theilende Winkel, so theile man ihn in vier gleiche Theile, wodurch man also die drei Theilungspunkte D, C, E erhält; alsdann ziehe man die Gerade CC', führe aus C' durch D und E die CF und CG, auf welcher jeden von dem Peri-

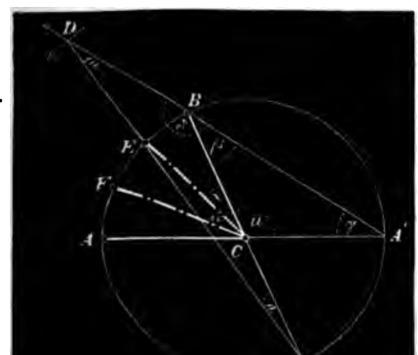
pheriepunkte aus der Durchmesser AA' aufgetragen wird; verbindet man endlich die so erfolgten Punkte F und G mit dem Mittelpunkte O, so erhält man den Bogen $HJ = \frac{1}{3} AB$.

Diese Punkte erhält man aber auch dadurch, indem man, wie zuvor, AO bis A' und BO bis B' verlängert, aus A' so wie aus B' durch C Gerade führt, auf jeder von C aus den Durchmesser aufträgt und die so erfolgten Punkte F' und G' mit dem Mittelpunkte O verbindet. — Diese Punkte fallen, wie man aus der Construction sieht, fast in dieselbe Gerade, so dass es doch alles eins ist, ob man dieses oder jenes Verfahren anwendet. Nur die Rechnung zeigt einen Unterschied, welcher jedoch nicht sehr bedeutend ist.

XXVI. Trisections-Methode.

Ein ähnliches Verfahren der Dreitheilung des Winkels besteht in Folgendem:

Fig. 92.



Es sei ACB (Fig. 92) der in drei gleiche Theile zu theilende Winkel. Man verlängere beide Schenkel über die Spitze hinaus, mache $B'C = A'C = BC = AC$, ziehe die Gerade $A'BD$ und mache auch $BD = BC$; alsdann verbinde man B' mit D und den so erfolgten Punkt E mit C durch Gerade, so ist

$$\text{arc}\, BE = \tfrac{1}{3} \text{arc}\, AB \text{ und}$$
$$\measuredangle BCE = \tfrac{1}{3} ACB.$$

Auch dieses Verfahren lässt sich durch Rechnung sehr leicht erproben. Setzt man nun zu diesem Behufe der Kürze wegen den

$$\measuredangle ACB = \alpha,\; A'BC = \beta \text{ und } BA'C = \gamma,$$

ferner $\measuredangle BDE = m,\; BB'E = n$ und $BCE = x$,

so hat man: $\measuredangle \alpha = \beta + \gamma = 2\beta = 2\gamma,$

daher $\beta = \frac{\alpha}{2} = m + n;$

wird also α als bekannt vorausgesetzt, so ist $u = 180^0 - \alpha$ und da $\beta = \gamma$ ist, so hat man $\beta = m + n = \frac{\alpha}{2}$, daher auch $\measuredangle DBC = \delta$ gegeben.

Setzt man ferner den Halbmesser $AC = 1$, so folgt, da $BD = BC = B'C$ ist,

$$BD = AC = 1 \quad \text{und} \quad BB' = 2;$$

da also in dem aufzulösenden Dreiecke $BB'D$ die zwei Seiten BD so wie BB' und der von ihnen eingeschlossene Winkel bekannt ist, so kann es trigonometrisch aufgelöst werden, und zwar mittels der bekannten Formel

$$\text{tang}\left(\frac{m-n}{2}\right) = \text{tang}\left(\frac{m+n}{2}\right) . \frac{BB' - BD}{BB' + BD};$$

substituirt man in diese Formel die obigen Werthe der Seiten, so folgt

$$\text{tang}\left(\frac{m-n}{2}\right) = \text{tang}\left(\frac{m+n}{2}\right) . \frac{2-1}{2+1} = \text{tang}\left(\frac{m+n}{2}\right) . \frac{1}{3}.$$

Da aber $m + n = \frac{\alpha}{2}$ ist, so folgt daraus

$$\frac{m+n}{2} = \frac{\alpha}{4},$$

welcher Werth in die letzte Gleichung substituirt, gibt

$$\text{tang}\left(\frac{m-n}{2}\right) = \text{tang}\,\frac{\alpha}{4} . \frac{1}{3}$$

oder

$$\text{tang}\left(\frac{m-n}{2}\right) = \text{tang}\,\frac{\alpha}{4} . 0\cdot\dot{3}.$$

Dies ist nun die Formel, mittels welcher man sehr leicht die Differenz der Winkel, deren Summe bekannt ist, berechnet, und aus den beiden so bekannten Gleichungen den doppelten Winkel des Dreieckes $BB'D$ d. i. $2n = x$ findet.

Da nach dieser Construction das Verhältniss der zwei Seiten BD und BB' ungeändert bleibt, so wird auch der Factor $\frac{1}{3} = 0\cdot333\ldots = 0\cdot\dot{3}$ nicht verändert; somit ist in diesem Falle die Untersuchung höchst einfach und ähnlich der in der vorhergehenden Methode. Doch sind hier die Resultate verschieden, welches seinen Grund darin hat, indem hier die Dreiecke bei jedem Winkel umgekehrt liegen, welches auf den gesuchten Winkel einen Einfluss hat.

Setzt man also $\alpha = 10^0$, so hat man

$$\text{tang}\left(\frac{m-n}{2}\right) = \text{tang}\,\frac{\alpha}{4} . 0\cdot\dot{3}.$$
$$= \text{tang}\,2^0\,30' . 0\cdot333333\ldots,$$

daher

$$\log\text{tang}\left(\frac{m-n}{2}\right) = \lg\text{tg}\,2^0\,30' + \lg 0\,3333333;$$

nun ist $\log \tan 2^0\, 30' = 8{\cdot}6400931 - 10$ } , welches addirt,
und $\log 0{\cdot}3333333 = 0{\cdot}5228786 - 1$ }
gibt $9{\cdot}1629717 - 11$,
daher $\log \tan \left(\frac{m-n}{2}\right) = 8{\cdot}1629717 - 10.$

Diesem entspricht $0^0\, 50'\, 1''$,

also ist $\frac{m-n}{2} = 0^0\, 50'\, 1''$,

somit $m - n = 1^0\, 40'\, 2''$;

da also $m + n = 4^0\, 59'\, 60''$ ist

und $m - n = 1^0\, 40'\, 2''$ gefunden wurde,

so folgt durch Subtraction dieser zwei Gleichungen

$$2n = 3^0\, 19'\, 58'',$$

und da $2n = x$ nach der Construction ist, so ist

$$x = 3^0\, 19'\, 58''.$$

Vergleicht man nun diesen gefundenen Werth mit dem wahren Drittel, so hat man, da $\frac{\alpha}{3} = 10^0 : 3 = 3^0\, 20'\, 0''$ ist,

$$\frac{\alpha}{3} - x = 3^0\, 19'\, 60'' - 3^0\, 19'\, 58''$$

$$= F = 0^0\;\; 0'\, 2''.$$

Also ist der Fehler bei 10^0 zwei Secunden, somit beim gewöhnlichen Zeichnen als Null anzusehen.

Vergleicht man dieses Resultat mit dem der vorgehenden Methode, so sieht man, dass hier der gefundene Winkel um zwei Secunden zu klein, hingegen bei der vorhergehenden um fünf Secunden zu gross ist.

Eine weitere Untersuchung zeigt, dass je grösser der zu theilende Winkel ist, desto grösser auch der Fehler wird.

Wird nun der Werth für jeden einzelnen Winkel in die obige allgemeine Formel substituirt und von 10 zu 10 Grad gerechnet, so findet man folgende Resultate und Fehler:

Für	$\alpha = 10^0$	ist	$x = 3^0\, 19'\, 58''$	also	$F = 0^0\;\; 0'\;\; 2''$
„	$\alpha = 20^0$	„	$x = 6^0\, 39'\, 32''$	„	$F = 0^0\;\; 0'\, 28''$
„	$\alpha = 30^0$	„	$x = 9^0\, 58'\, 38''$	„	$F = 0^0\;\; 1'\, 22''$
„	$\alpha = 40^0$	„	$x = 13^0\, 16'\, 22''$	„	$F = 0^0\;\; 3'\, 38''$
„	$\alpha = 50^0$	„	$x = 16^0\, 32'\, 52''$	„	$F = 0^0\;\; 7'\;\; 8''$
„	$\alpha = 60^0$	„	$x = 19^0\, 47'\, 32''$	„	$F = 0^0\, 12'\, 28''$
„	$\alpha = 70^0$	„	$x = 23^0\;\; 0'\;\; 2''$	„	$F = 0^0\, 19'\, 58''$
„	$\alpha = 80^0$	„	$x = 26^0\;\; 9'\, 54''$	„	$F = 0^0\, 30'\;\; 6''$
„	$\alpha = 90^0$	„	$x = 29^0\;\; 6'\, 40''$	„	$F = 0^0\, 53'\, 20''$.

Aus dieser schematischen Darstellung sieht man leicht ein, dass der Fehler von 50° angefangen bedeutend wächst, und dass man diese Methode bei grösseren Winkeln nicht immer anwenden kann; doch ist diese Methode desshalb vortheilhaft, weil man bei Anwendung derselben ausser dem Theilungskreise nicht so viel Raum braucht, indem hierbei auf der Verlängerung der Linie *A'B*, d. i. auf der Verlängerung der Sehne des Ergänzungswinkels nur der Halbmesser aufgetragen wird. Doch wird jeder Winkel, der über 90° ist, in Bezug auf die praktische Genauigkeit mittels einmaligen Halbirens so getheilt, als man diess nur brauchen kann.

Fig. 93.

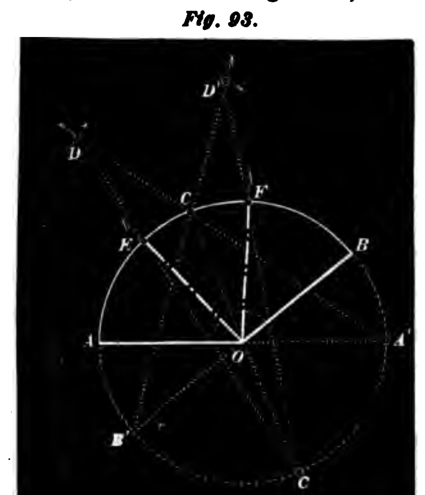
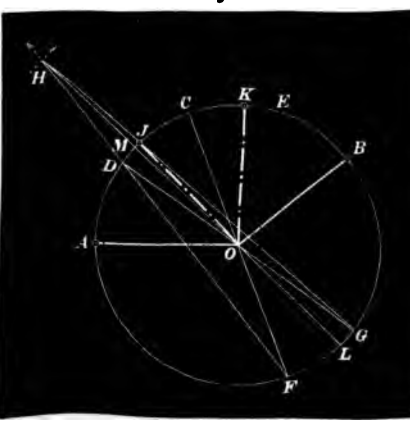


Fig. 94.



Ist z. B. *A O B* (Fig 93) der zu theilende Winkel, welcher ungefähr 140° hat, so wird: hier bei der graphischen Darstellung der Dreitheilung kein Fehler bemerkbar, wenn der Winkel einmal halbirt wird; nach der Rechnung wird jedoch ein Fehler von ungefähr 20' Minuten sein. Um jedoch auch diesen Fehler zu vermeiden, theile man den gegebenen Winkel in vier gleiche Theile, und suche von dem einen oder dem anderen mittleren Viertel hier z. B. in Fig. 94 von dem Viertel *C O D* den dritten Theil so, dass der Theilungspunkt für die Dreitheilung d. i. *J* an Ort und Stelle kommt, wo er sein soll. Man verlängere also zu diesem Behufe die *C O* und *D O* über den Scheitelpunkt *O* hinaus, führe aus *F* durch *D* eine Gerade, mache die Verlängerung *D H* = *D O* und verbinde den so erhaltenen Punkt

H mit G durch eine Gerade, so ist

$$\text{arc } AJ = \tfrac{1}{3} \text{ arc } AB$$

und

$$\sphericalangle AOJ = \tfrac{1}{3} AOB$$

so genau als man sich diess nur wünschen kann.

Es fragt sich nun hier, woher kommt es, dass diese Genauigkeit so gross ist? Diess kommt daher, weil hier der eine Theil des Winkels $FOG = COD$, d. i. $MOC = FOL$, mathematisch richtig in drei gleiche Theile getheilt wird.

Wird nämlich aus H durch O eine Gerade geführt, so entstehen hier zwei, jedoch ungleiche Theile des Winkels $FOG = COD$, d. i. FOL und GOL, wo $FOL = MOC$ als der grössere Winkel mathematisch richtig in drei gleiche Theile getheilt wird; denn es ist $DH = DO = FO = LO$, daher

$$\sphericalangle FOL = OFH + FHO,$$

ferner $$OFH = ODF = 2 FHO,$$

somit $$FOL = 2 FHO + FHO,$$

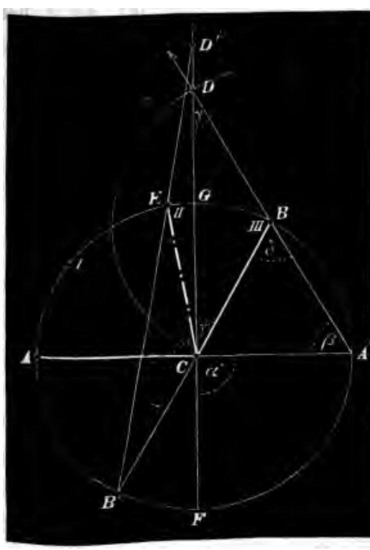
also $$FOL = 3 FHO$$

folglich $$FHO = \tfrac{1}{3} FOL$$

mathematisch genau.

Der andere Theil ist desshalb auch als sehr genau getheilt anzunehmen, indem er sehr klein ist und die betreffenden Linien einander gleich, also $HJ = JO = GO$ angenommen werden können.

Fig. 95.



Da jedoch bei allem dem die Viertheilung nach der gezeigten Art etwas aufhält, so ist dieses Verfahren auf folgende Art zu vereinfachen:

Es sei ACB (Fig. 95) der zu theilende Winkel und AB der ihm entsprechende Bogen. Man ergänze den Bogen AB zu einem Kreise, verlängere die beiden Schenkel über den Scheitelpunkt C hinaus, führe aus A' durch B eine Gerade, mache $BD = BC$, ziehe aus C durch D eine Gerade, mache $D'G = BD = BC =$ dem Halb-

messer und verbinde D' mit B', so ist arc $BE = \frac{1}{3} AB$ und $\sphericalangle BCE = \frac{1}{3} ACB$, welche Construction ohne Halbirung mit einer ausserordentlichen Genauigkeit ist.

Warum? Verlängert man CD über C hinaus und bezeichnet die Winkel mit einfachen Buchstaben, so wie sie in der Figur angedeutet sind, also ACG mit α, $A'CF$ mit α', $BA'C$ mit β, $A'DC$ mit γ u. s. w., so ist der Winkel $A'CF = ACG$ oder $\alpha' = \alpha$ als Scheitelwinkel; und da $BD = BC = A'C = CF$ ist, so folgt

$$\gamma = \tfrac{1}{3}\alpha'$$

mathematisch genau; denn es ist

$$\alpha' = \beta + \gamma,$$

ferner

$$\beta = \delta$$

und

$$\delta = \gamma + \gamma' = 2\gamma = 2\gamma',$$

somit

$$\alpha' = 2\gamma + \gamma = 3\gamma,$$

daher

$$\gamma = \tfrac{1}{3}\alpha' = \tfrac{1}{3}\alpha.$$

Oder es ist

$$\sphericalangle BCG = \tfrac{1}{4} ACB,$$

folglich muss er $\frac{1}{3}$ von ACG sein; es bleibt daher nur noch der Rest $BCG = B'CF$ in drei gleiche Theile zu theilen.

Da nun nach jedem von unseren Verfahren ein kleiner Winkel auf Secunden genau trisecirt werden kann, so wendet man eines dieser Verfahren hier an, wodurch das Resultat auf Secunden genau erhalten wird. Man braucht jedoch keines von diesen Verfahren anzuwenden, denn nach der obigen Construction ist auch der zweite Winkel $BCG = B'CF$ sehr genau in drei gleiche Theile getheilt, indem hier $D'E = D'G$ angenommen werden kann, so dass dann

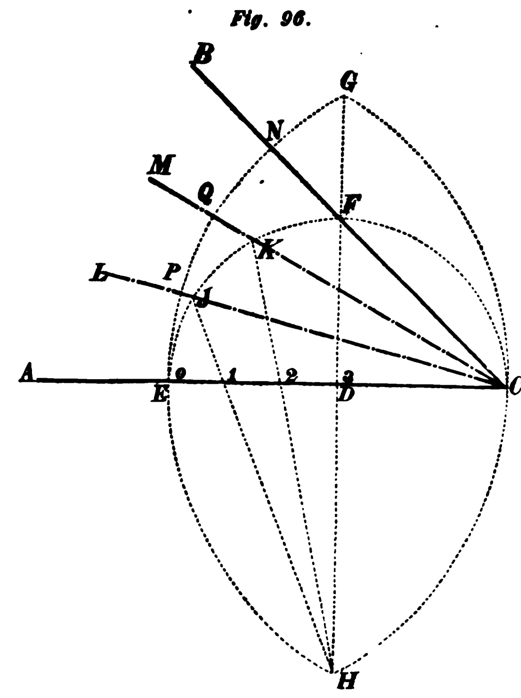
$$\text{arc } BG + EG = BE = \tfrac{1}{3} AB$$

näherungsweise, jedoch mit einer sehr grossen Genauigkeit erfolgt.

XXVII. Tr isections-Methode.

Dieses Verfahren ist eine Substitutions-Methode aus der Polysections-Methode abgeleitet.

Es sei ACB (Fig. 96) der zu theilende Winkel und EN der ihm entsprechende Bogen. Man nehme auf dem Schenkel AC eine beliebige Einheit CD an und trage sie von D nach E nochmals auf, beschreibe aus D mit dem Halbmesser $= CD$ über CE einen Halbkreis CFE, dann aus C mit CE den Bogen GEH und aus E mit demselben Halbmesser den Bogen GCH, wo dann EN der



zu theilende Bogen ist. Wird nun das Stück *DE* des Schenkels *AC* in drei gleiche Theile getheilt und aus dem Punkte *H* durch den ersten und zweiten Theilungspunkt Gerade bis zu der Peripherie des Halbkreises geführt, zuletzt aus dem Scheitelpunkte *C* durch die so in der Peripherie des Halbkreises erfolgten Punkte *J* und *K* die Geraden *CL* und *CM* gezogen, so erhält man die Dreitheilung des Bogens und des Winkels, so dass arc $EP = PQ = QN = \frac{1}{3} EN$ und ebenso $\sphericalangle ACL = LCM = BCM = \frac{1}{3} ACB$ ist.

Mittels des Halbkreises *CFE* kann man jeden beliebigen Winkel bis 90° auf dieselbe Art in eine beliebige Anzahl gleicher Theile theilen, wie dieses später bei der Vieltheilung gezeigt wird.

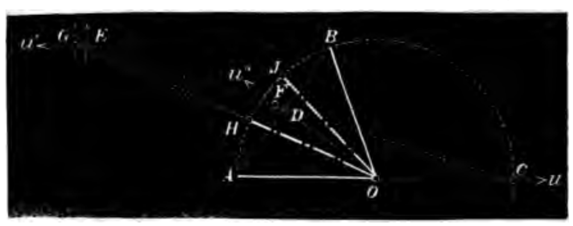
Um die Theilung des Stückes *DE* zu vermeiden, trägt man eine beliebige Einheit auf dem Schenkel *AC* von *C* aus 6mal auf, benützt aber nur die 3 letzten durch das Auftragen erhaltenen Theilungspunkte, wenn man aus dem Punkte *H* die Transversalen zieht.

XXVIII. Trisections-Methode.

Es sei *AOB* (Fig. 97) der zu trisecirende Winkel.

Man verlängere den Schenkel *AO* über den Scheitelpunkt *O* hinaus, und mache $CO = AO$; ziehe aus *B* zu *AO* die *Bu'* parallel, halbire dann die Sehne *AB* in *D*, und trage auf der Parallelen *Bu'* von *B* aus den Abstand des Halbirungspunktes *D* von dem Punkte *C* d. i. die *CD* auf; nun verbinde man den so erfolg-

Fig. 97.

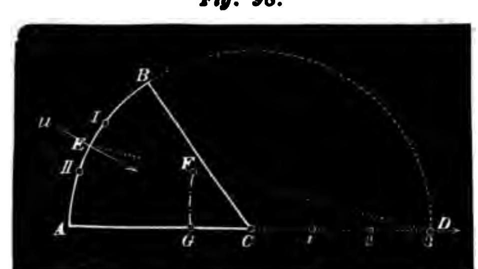


ten Punkt *E* mit dem Punkte *C* durch eine Gerade, führe aus dem Scheitelpunkte *O* durch den Halbirungspunkt *D* eine Gerade bis die Verbindungslinie *CE* geschnitten ist; alsdann fasse man die Entfernung *CF* in Zirkel und durchschneide damit die Parallele *Bu* von *B* aus bei *G*. Wird endlich der so erfolgte Punkt *G* mit dem Scheitelpunkte *O* durch eine Gerade verbunden, so schneidet diese von dem Bogen *AB* den dritten Theil ab, welcher auf *AB* aufgetragen, mit sehr grosser Genauigkeit die Dreitheilung des Bogens und somit, *H* und *J* mit *O* verbunden, auch die des Winkels gibt.

XXIX. Trisections-Methode.

Das hier nachfolgende Verfahren ist desshalb sehr interessant, weil man mit den Constructions-Linien gar nicht über den Theilungskreis hinauszugehen braucht; es besteht im Folgenden:

Fig. 98.

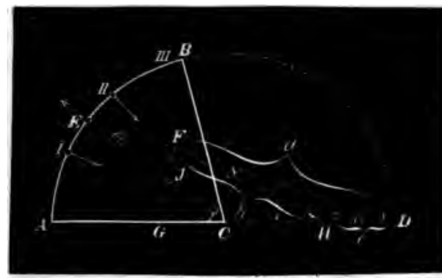


Es sei *ACB* (Fig. 98) der zu theilende Winkel. Man verlängere den Schenkel *AC* über *C* hinaus, trage dann auf dieser Verlängerung von *C* aus eine beliebige Einheit *C*1 dreimal auf, beschreibe mit *C*3 = *CD* den Halbkreis *ABD*, und halbire den Bogen *AB* in *E* (am leichtesten, indem man aus *C* zu der gedachten Sehne *BD* eine Parallele zieht); verbinde den Punkt *E* mit *D* durch eine Gerade und beschreibe aus dem Punkte 2 mit *CD* = *AC* = *C*3 den Bogen *FG*. Dieser Bogen lässt sich auf dem gegebenen Bogen *AB* mit einer sehr grossen Genauigkeit dreimal auftragen.

Da diese Methode höchst einfach, zugleich aber auch sehr leicht zu merken ist, so wollen wir sie einer näheren mathemati-

schen Betrachtung würdigen, zumal, da sie die zur Rechnung nöthigen Daten in sich enthält.

Fig. 99.



Betrachten wir in Fig. 99 das Dreieck *FHD*, so finden wir, dass in demselben zwei Seiten und der der grösseren Seite gegenüberstehende Winkel bekannt ist; es ist nämlich bekannt: die Seiten *FH*, *DH* und der der Seite *FH* gegenüberliegende Winkel *FDH*.

Setzt man nun der Kürze wegen

die Seite $DF = a$,

„ $FH = b$,

und „ $DH = c$; ferner

den Winkel $FDH = \beta$,

„ $DFH = y$,

so hat man

$$b : c = \sin\beta : \sin y,$$

woraus

$$\sin y = \frac{c \sin\beta}{b} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I.)$$

folgt.

Mittels dieser Formel kann man also jeden beliebigen Winkel x, welcher als ein äusserer Winkel des Dreieckes *DHF* ist, dessen Sehne *FG* die zu suchende Drittel-Sehne sein soll, finden, indem man dem gegebenen Winkel φ und folglich auch dem Winkel β nach und nach verschiedene Werthe gibt.

Setzt man nun $b = 1$,

so ist $c = \frac{1}{3} = 0{\cdot}3333\ldots\ldots$;

nimmt man ferner den Winkel $\varphi = 30^0$ an,

so hat man, da der Winkel β als der Peripherie-Winkel des halben gegebenen Winkels ist,

$$\beta = \frac{\varphi}{4} = 7^0\,30',$$

daher hat man aus Formel *I*

$$\sin y = \frac{c \,.\, \sin\frac{\varphi}{4}}{b}$$

und wegen $c = \frac{b}{3}$

folgt $\sin y = \frac{\frac{b}{3} \cdot \sin\frac{\varphi}{4}}{b}$, welches abgekürzt,

gibt $\sin y = \frac{1}{3} \cdot \sin\frac{\varphi}{4}$ . . . . (*II.*)

Substituirt man in diese Formel die obigen Werthe,

so folgt: $\sin y = 0{\cdot}3333333 \,.\, \sin 7^{\circ}\, 30'$,

daher $\log\sin y = \log 0{\cdot}333\ldots + \log\sin 7^{\circ}\, 30'$.

Nun ist $\log 0{\cdot}333\ldots = 0{\cdot}5228787 - 1$ \
und $\log\sin 7^{\circ}\, 30' = 9{\cdot}1156977 - 10$ } , welches addirt,

gibt $9{\cdot}6385764 - 11$,

daher $\log\sin y = 8{\cdot}6385764 - 10$,

diesem entspricht $2^{\circ}\, 29'\, 34{\cdot}76''$.

Da also $\beta = 7^{\circ}\, 30'\, 0''$ ist,

und $y = 2^{\circ}\, 29'\, 34{\cdot}76''$ gefunden wurde,

so folgt $\beta + y = 9^{\circ}\, 59'\, 34{\cdot}76''$;

es ist aber $\beta + y = x =$ dem äusseren Winkel des Dreieckes EDH, also ist

$$x = 9^{\circ}\, 59'\, 34{\cdot}76''.$$

Da also der Winkel x dem Dreiecke FGH, in welchem $FH = GH = AC = 1$ ist, angehört, und der Sehne FG entspricht, welche in dem gegebenen Bogen AB dreimal enthalten sein soll, so ist der Werth von x der gesuchte annähernde Werth.

Wird dieser Werth von dem wahren des gegebenen (hier angenommenen) Winkels abgezogen, so erhält man,

da $x_w = 9^{\circ}\, 59'\, 60''$

und $x_a = 9^{\circ}\, 59'\, 34{\cdot}76''$ ist,

$$x_w - x_a = 0^{\circ}\, 0'\, 25{\cdot}24'';$$

also ist der nach dieser Construction bei der Dreitheilung begangene Fehler $= 25{\cdot}24$ Secunden.

Um den Werth im Längenmasse zu finden, haben wir:

$$\tfrac{1}{2} FG = FH \sin\frac{x}{2};$$

und da $FH = 1$ und $\frac{x}{2} = 4^{\circ}\, 59'\, 47{\cdot}38''$ ist, so hat man

$$\tfrac{1}{2} FG = \sin 4^{\circ}\, 59'\, 47{\cdot}38'',$$

woraus $\log\tfrac{1}{2} FG = \log\sin 4^{\circ}\, 59'\, 47{\cdot}38''$ folgt;

und da

$$\log\sin 4^{\circ}\, 59'\, 47{\cdot}38'' = 8{\cdot}9398322 - 10,$$

so folgt $\log\tfrac{1}{2} FG = 0{\cdot}9398322 - 2$;

diesem entspricht 0·0870627;
man hat daher $\frac{1}{2} FG = 0·0870627$
und $FG = 0·1741254$ = der Sehne des Winkels von 10°, indem $\varphi = 30°$ gesetzt wurde.

Da nun nach der Sehnen-Tafel

$s_w = 0·1743114$, und die gefundene

Sehne $s_a = 0·1741254$ ist, so folgt

$s_w - s_a = 0·0001860.$

Also ist der Fehler im Längenmasse

$$F = 0·000186 = \frac{186}{1000000}$$

oder wenn man im Zähler die erste Ziffer um 1 erhöhet, ist

$$F = \frac{2}{10000} = \frac{1}{5000}.$$

Somit ist der Fehler so gering, dass man ihn beim Zeichnen als 0 ansehen kann.

Führt man nun die Rechnung so fort, so findet man weiter

für $\varphi = 45°, y = 3° 43' 42'$

$\beta = 11° 15' 0''$

also $x_a = y + \beta = 14° 58' 42''$

und da $x_w = 14° 59' 60''$ ist,

so folgt durch Subtraction dieser Werthe

$$x_w - x_a = 0° 1' 18'';$$

man hat daher bei einem Winkel von 45° den Fehler $F = 0° 1' 18''$.

Für $\varphi = 60°$ ist $F = 0° 3' 2·77''$

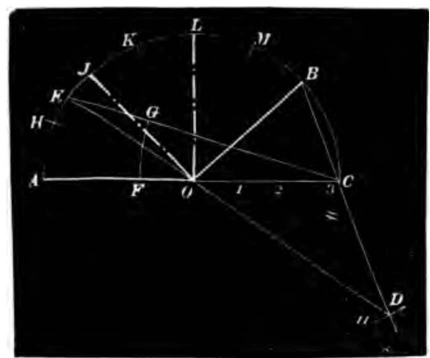
für $\varphi = 90°$ ist $F = 0° 10' 17''$.

Man sieht also hieraus, dass der Fehler desto grösser wird, je grösser der Winkel ist; doch ist der Fehler selbst bei den Winkeln, die nahe an 90° sind, noch immer gering.

Um nun auch diesen Fehler bei grösserem Winkel zu vermeiden, ist nothwendig, den gegebenen Winkel zuerst in vier gleiche Theile zu theilen, und dann von jedem der zwei mittleren oder nur von irgend einem Viertel den dritten Theil zu suchen. Dadurch ist man im Stande, nicht nur die Winkel, welche unter 90° sind, sondern auch diejenigen, welche über 90° betragen, auf Secunden genau zu triseciren.

Ist z. B. der zu theilende Winkel $\varphi = 135°$, also der Winkel


Fig. 100.



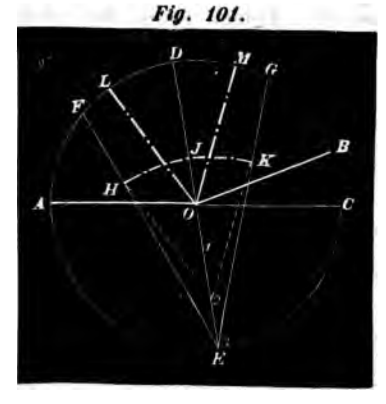
A O B (Fig 100), so theile man ihn zuerst in vier gleiche Theile (welches nach unserer Methode sehr leicht ist), alsdann suche man von dem einen Theile die Dreitheilung und theile so auch die übrigen drei Theile, wodurch man also auch von dem ganzen Winkel die betreffenden Theilungspunkte findet.

Da jedoch die gewöhnliche Viertheilung zu lästig wäre, und man hier nur den einen vierten Theil und zwar was immer für einen benützt, so ist es vortheilhaft, nach unserm Verfahren nur den vierten Theil des Bogens abzuschneiden und diesen dann zu triseciren. Am einfachsten wird diess auf folgende Art ausgeführt:

Man führe aus dem Punkte ***B*** durch ***C*** eine Gerade, mache $CD = CO$ und führe aus ***D*** durch ***O*** eine Gerade bis ***E***, so ist arc $AE = \frac{1}{4} AB$; nun verbinde man den Punkt ***E*** mit ***C*** durch eine Gerade, theile die ***C O*** in drei gleiche Theile und beschreibe aus dem zweiten Theilungspunkte, d. i. aus 2 mit dem Halbmesser ***C O*** den Bogen ***F G***, welcher der sechste Theil von ***A B*** sein wird.

Wie man aus dieser Construction sieht, ist der Bogen ***FG*** eigentlich $\frac{2}{3}$ von dem Viertel, und somit $\frac{1}{6}$ von dem ganzen gegebenen Bogen; daher ***F G*** auf ***A B*** zweimal aufgetragen, gibt den dritten Theil des gegebenen Bogens.

Fig. 101.



Will man hingegen bei einem Winkel, der nahe an 2 R ist, den Bogen fürs ganze Drittel erhalten, so verfahre man, wie folgt:

Es sei ***A OB*** (Fig 101) der zu theilende Winkel und ***A D B*** der ihm entsprechende Bogen. Man theile den gegebenen Bogen ***A B*** in 4 gleiche Theile, wodurch man die 3 Theilungspunkte ***D***, ***F***, ***G*** erhält; alsdann führe man aus ***D*** durch

den Mittelpunkt *O* eine Gerade bis zu dem Peripheriepunkte *E* und verbinde den Punkt *E* mit den 2 übrigen Punkten der Viertheilung des gegebenen Bogens; theilt man zuletzt den Halbmesser *EO* in 8 gleiche Theile, und beschreibt aus 2 mit *EO* zwischen den Sehnen *EF* und *EG* den Bogen *HK*, so lässt sich *HK* auf *AB* dreimal auftragen, wodurch man also

arc $AL = LM = MB = \frac{1}{3} AB$

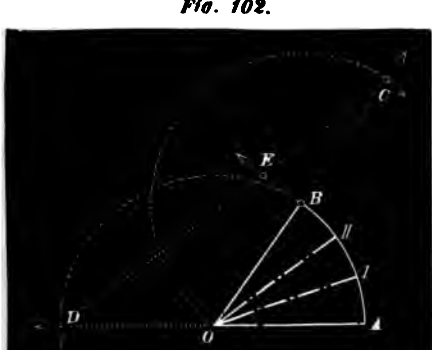
und $\measuredangle\ AOL = LOM = MOB = \frac{1}{3} AOB$ erhält.

Wollte man noch genauer verfahren, so sucht man den achten Theil von dem gegebenen Bogen, und von dem gefundenen Achtel das Zweidrittel, wodurch jeder Winkel bis 180° auf Secunden genau trisecirt wird.

XXX. Trisections-Methode.

Es sei *AOB* (Fig. 102) der gegebene Winkel, welcher so wie der ihm entsprechende Bogen in drei gleiche Theile getheilt werden soll.

Fig. 102.



Man verlängere den Schenkel *BO* über *B* und den *OA* über *O* hinaus, mache *BC* so wie *DO* = *AO*, verbinde den Punkt *C* mit *D* durch eine Gerade, errichte im Punkte *B* der *CO* eine Lothrechte, bis die *CD* in *E* geschnitten wird, so lässt sich die Tangente *BE* auf dem gegebenen Bogen *AB* dreimal auftragen. Somit *BE* auf *AB* dreimal aufgetragen, gibt arc $AI = III = IIB = \frac{1}{3} AB$ und $\measuredangle\ AOI = \measuredangle\ IOII = \measuredangle\ IIOB = \frac{1}{3} AOB$.

Die zwei Halbkreise, welche hier der Deutlichkeit wegen gezogen wurden, können bei der Construction auch weggelassen werden, so dass man dann nur die Verlängerungen zu ziehen und gleich dem Halbmesser zu machen braucht, wodurch die Construction vereinfacht wird.

Dieses höchst einfache Verfahren kann jedoch nur bei den Winkeln von 1 bis 60° angewendet werden, weil über 60° hinaus der Fehler sehr rasch wächst. Bei einem Winkel von 60° ist der

Fehler 0° 3′ 6″; also der gefundene Winkel wird um 3 Minuten zu klein. — Bei dem Winkel von 90° ist der Fehler 1° 5′ 2″, d. h. das gefundene Drittel ist um dieses Mass zu klein.

Die Fehler findet man auf folgende Art: Setzt man z. B.

$$\measuredangle\, AOB = \alpha = 60^\circ,$$

ferner $\measuredangle\, EDO = x$, und $BCE = y$;

und eben so $AO = DO = 1$, also $CO = 2$,

so hat man nach der bekannten Formel

$$\text{tang}\left(\frac{x-y}{2}\right) = \text{tang}\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \frac{1}{2+1} = \text{tang}\,\frac{60^\circ}{2} \cdot \tfrac{1}{3} = \text{tang}\; 30^\circ \cdot 0{\cdot}\dot{3}.$$

und $\log \text{tang}\,\frac{x-y}{2} = \log \text{tang}\, 30^\circ + \log 0{\cdot}33333..;$

nun ist $\log \text{tang}\, 30^\circ = 9{\cdot}7614394 - 10$
und $\log 0{\cdot}3333333 = 0{\cdot}5228787 - 1$ } welches addirt,

gibt $10{\cdot}2843181 - 11$,

daher $\log \text{tang}\,\frac{x-y}{2} = 9{\cdot}2843181 - 10.$

Diesem entspricht: $10^\circ\, 53'\, 36''$;

folglich ist $\frac{x-y}{2} = 10^\circ\, 53'\, 36''$,

daher $x - y = 21^\circ\, 47'\, 12''$

und da $x + y = 60^\circ\, 0'\, 0''$ ist,

so folgt $2x = 81^\circ\, 47'\, 12''$,

daraus $x = 40^\circ\, 53'\, 36''$

und $y = 19^\circ\, 6'\, 24''$.

Es ist also $BE = BC \,.\, \text{tang}\, 19^\circ\, 6'\, 24''$

und da $BC = 1$ ist,

so ist $BE = \text{tang}\, 19^\circ\, 6'\, 24''$,

daher $\log BE = \log \text{tang}\, 19^\circ\, 6'\, 24'' = 9{\cdot}5395920 - 10$

oder $\log BE = 0{\cdot}5395920 - 1$;

diesem entspricht 0·3464112.

Es ist aber nach den Sehnen-Tafeln

Chorda $20^\circ = 0{\cdot}3472964$

und $BE = 0{\cdot}3464112$

daher die Differenz $= 0{\cdot}0008852$;

also ist der Fehler $F = 0{\cdot}0008852$

$$= \frac{8}{10000} = \frac{1}{1250}.$$

Es ist also der Fehler etwas über $\frac{1}{100000}$, d. h. die Tangente *B E*, welche als die Sehne des Drittels angenommen wird, ist um $\frac{1}{100000}$ zu klein, wenn sie mit dem wahren Werthe der Sehne verglichen wird. Der obige Werth gibt, im Gradmasse ausgedrückt, $0^\circ\ 3'\ 6''$.

Substituirt man nun für α, 10, 20, 30, 40, 50, 70, 80 und 90°, so findet man, dass der Fehler wächst und wie schon bemerkt wurde, bei dem Winkel von 90° bedeutend, also $= 0{\cdot}0182936 = \frac{18}{1000} = \frac{9}{500}$ wird; welches im Gradmasse ausgedrückt $1^\circ\ 5'\ 2''$ gibt.

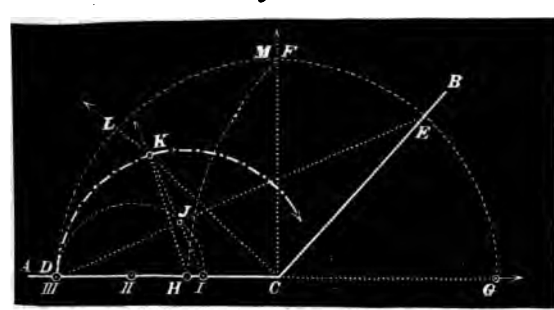
Da jedoch dieses Verfahren noch bei einem Winkel von 60° eine praktische Genauigkeit gibt, so kann man es mit Vortheil anwenden, sobald man den gegebenen Winkel halbirt und mit der Hälfte die Dreitheilung vornimmt.

Doch kann man auch ohne Halbirung den dritten Theil dadurch finden, indem man eine Verbesserung vornimmt, wenn man nämlich aus *E* zu *C O* eine Parallele führt, welche die Verlängerung des gegebenen Bogens schneidet und so den richtigeren dritten Theil für den Bogen *A B* gibt.

XXXI. Trisections-Methode.

Folgende Methode gehört unstreitig zu den einfachsten und richtigsten; auch geht sie sehr weit und genau, wie sich diess aus der Construction und Rechnung ergibt.

Fig. 103.



Es sei *A C B* (*Fig.* 103) der gegebene Winkel, welcher in drei gleiche Theile getheilt werden soll. Man trage auf dem einen Schenkel hier auf *A C* von *C* aus ein beliebiges Stück hier *C I* dreimal auf, beschreibe aus *C* mit dem Halbmesser $=$ *C III* den Halbkreis *D F E G* und aus *II* mit *II III* $=$ *I II* über *I III* einen Halbkreis (welcher, wie wir bei der Bisection gezeigt haben, der geometrische Ort für den ersten Theilungspunkt einer jeden beliebigen, vom Punkte *D* aus im Halbkreise *D F G* gezoge-

nen Sehne ist, wenn solche in drei gleiche Theile getheilt wird). Nun errichte man im Scheitelpunkt *C* des gegebenen Winkels *DCE* eine Senkrechte bis zu dem Bogen *DE* verlängert, beschreibe aus dem Punkte *G* mit dem Radius gleich der gedachten Neunziger Sehne *FG* einen Bogen, bis der Schenkel *AC* in *H* geschnitten wird. Dieser Punkt ist also der Mittelpunkt für den Trisectionsbogen. Wird nun aus dem Punkte *H* mit dem Halbmesser $= DH$ ein Bogen, hier *DK*, beschrieben, so ist dieser der Trisectionsbogen für jeden beliebigen Winkel von 0 bis 180°.

Um also mittelst dieses Bogens die Dreitheilung vorzunehmen, braucht man nur die dem gegebenen Winkel und Bogen entsprechende Sehne *DE* zu ziehen, welche den über *I III* beschriebenen Halbkreis in *J* schneidet, durch diesen Punkt aus *I* eine Gerade bis zu dem Trisectionsbogen zu ziehen, hier bis *K*, und aus *C* durch *K* bis zu dem zu theilenden Bogen eine Gerade zu führen, wodurch

$$\text{arc } DL = \tfrac{1}{3} DE$$

und

$$\measuredangle\ DCL = \tfrac{1}{3} DCE$$

abgeschnitten wird.

Wie die Versuche in grösserem Massstabe gezeigt haben, ist dieses Verfahren sehr genau; auch ist der Trisectionsbogen, welcher aus dem Punkte *H* beschrieben wird, eine äusserst genaue Substitution für eine Trisectionscurve.

Wir wollen nun sehen, was uns die Rechnung hierüber sagt.

Um den Winkel *DCL* zu finden, welcher nach unserer Construction der dritte Theil des gegebenen sein soll, muss man zuerst die Winkel des kleinen Dreieckes *HKI* suchen. Denkt man sich nun die *HK* gezogen, so hat man im Dreiecke *HKI* die Seite *HK* und *HI*, so wie den der Seite *HK* gegenüberliegenden Winkel *HCK* bekannt.

Setzt man $CD = 1$, so ist nach der Construction $CI = III = IIIII = \frac{1}{3} = 0{\cdot}333\ldots$; $DI = \frac{2}{3} = 0{\cdot}666\ldots$ ferner GH = der Neunziger Sehne $FG = \sqrt{2} = 1{\cdot}4142136$; und da *H* der Mittelpunkt des Trisectionsbogens *DK* ist, so folgt $HK = DH$;

nun ist aber $DG = 2{\cdot}0000000$

und $GH = GF = \sqrt{2} = 1{\cdot}4142136$

daher $DH = DG - GH = 2 - \sqrt{2} = 0{\cdot}5857864 = HK$;

da ferner, wie die Construction zeigt $GH + DI$ grösser ist, als

der Durchmesser DG, so findet man HI, indem man von der Summe dieser zwei Stücke den Durchmesser abzieht;

da also $\qquad GH = \sqrt{2} = 1·4142186$

und $\qquad DI = \frac{2}{3} = 0·6666666$ ist,

so folgt $\qquad GH + DI = \sqrt{2} + \frac{2}{3} = 2·0808802$, wovon

$\qquad DG = 2 \qquad$ abgezogen,

gibt $\qquad HI = 0·0808802$;

eben so findet man HC, indem $HC = HG - CG = \sqrt{2} - 1 = 1·4142136 - 1 = 0·4142136$ ist.

Setzt man nun den Winkel $DCE = 130°$,

so folgt $\qquad \sphericalangle ECG = 180° - 130° = 50°$,

daher $\qquad \sphericalangle CDE = CED = 50 : 2 = 25°$;

und da $\qquad \sphericalangle DJI$ ein Winkel im Halbkreise ist,

so ist $\qquad \sphericalangle DJI = 90°$,

daher $\qquad \sphericalangle DIJ = 90 - 25° = 65°$;

man hat somit im Dreiecke HKI:

$$HK : HI = \sin 65° : \sin HKI,$$

woraus $\qquad \sin HKI = \frac{HI \cdot \sin 65°}{HK} \ldots$ (I);

substituirt man in diese Formel die obgefundenen Werthe,

so folgt: $\qquad \sin HKI = \frac{0·0808802 \sin 65°}{0·5857864}$,

daher

$$\log \sin HKI = \log 0·0808802 + \log \sin 65° - \log 0·5857864;$$

nun ist $\quad \log 0·0808802 = 0·9078422 - 2$ } , welches addirt,

und $\quad \log \sin 65° = 9·9572757 - 10$ }

gibt $\qquad 10·8651179 - 12$,

und hievon $\log 0·5857864 = 0·7677392 - 1$ abgezogen,

gibt $\qquad 10·0973787 - 11$,

daher $\qquad \log \sin HKI = 9·0973787 - 10$.

Diesem entspricht: $\qquad 7° \; 11' \; 19''$,

es ist also $\qquad \sphericalangle HKI = 7° \; 11' \; 19''$;

und da $\qquad \sphericalangle HIK = 65° \; 0' \; 0''$ ist,

so folgt $HKI + HIK = 72° \; 11' \; 19''$.

Es ist somit auch der Winkel DHK bekannt, und zwar als ein äusserer Winkel des Dreieckes HIK,

somit $\qquad DHK = 72° \; 11' \; 19''$.

Wir können somit aus dem Dreiecke HCK den Winkel HCK als

das fragliche Drittel berechnen, denn es ist durch den Winkel *DHK* die Summe der Winkel *HCK* und *HKC* gegeben.

Man hat somit, nach der bekannten Formel:

$$\text{tang}\,\frac{(HCK-HKC)}{2} = \text{tang}\,\frac{HCK+HKC}{2}\cdot\frac{HK-HC}{HK+HC};$$

substituirt man in diese Formel die obgefundenen Werthe, so hat man

$$\text{tang}\,\frac{HCK-HKC}{2} = \text{tang}\ 36^0\ 5'\ 39\cdot5'' \times 0\cdot1715728 \ldots\ldots \text{(II)},$$

und $\log\text{tang}\,\frac{HCK-HKC}{2} = \log\text{tang}\,36^0 5' 39\cdot5'' + \log 0\cdot1715728;$

nun ist $\log\text{tang}\ 36^0\ 5'\ 39\cdot5'' = 9\cdot8627634 - 10$ } welches
und $\log 0\cdot1715728 = 0\cdot2344485 - 1$ } addirt,
gibt $10\cdot0972119 - 11,$

daher $\log\text{tang}\,\frac{HCK-HKC}{2} = 9\cdot0972119 - 10.$

Diesem entspricht: $7^0\ 7'\ 47\cdot7'';$

es ist also $\measuredangle\,\frac{HCK-HKC}{2} = 7^0\ 7'\ 47\cdot7'',$

daher $\measuredangle\ HCK - HKC = 14^0\,15'\,35\cdot4'',$

und da $\measuredangle\ HCK + HKC = 72^0\,11'\,19''$ ist,

so folgt $\measuredangle\ 2\,HCK = 86^0\,26'\,54\cdot4'',$

also $\measuredangle\ HCK = 43^0\,13'\,27\cdot2''.$

Da nun der dritte Theil des hier angenommenen Winkels,

also $130 : 3 = 43^0\ 19'\ 60''$ ist,

und $\measuredangle\ HCK = 43^0\ 13'\ 27\cdot2''$ gefunden wurde,

so folgt der Fehler $F = 0^0\ 6'\ 32.8''.$

Man sieht also daraus, dass der Fehler sehr gering ist; drückt man diesen Fehler im Längenmasse des Bogens aus, so hat man:

für $6'$ den Fehler $F = 0\cdot0017453,$
für $32''$ „ „ $F = 0\cdot0001551,$
daher für $6'\ 32''$ den Fehler $F = 0\cdot0019004,$
oder $F = 0\cdot002 = \frac{2}{1000} = \frac{1}{500},$
für den Halbmesser $= 1.$

Betrachtet man die Construction genau, so sieht man leicht ein, dass in den zwei zur Berechnung des fraglichen Drittels aufgestellten Formeln ausser den Werthen der Winkel die andern Werthe constant bleiben; man hat daher

$$\sin HKI = 0\cdot1380711\,.\sin HIK \ldots\ldots \text{(III)}$$

und $\text{tang}\,\frac{HCK-HKC}{2} = 0\cdot1715728\,.\,\text{tang}\,\frac{DHK}{2} \ldots\ldots \text{(IV)},$

in welchen Formeln die in besonderen Zahlen ausgedrückten Werthe für jeden beliebig angenommenen Winkel ungeändert bleiben, wesshalb also die Berechnung eines jeden Drittels sehr leicht und schnell gefunden werden kann.

Nimmt man nun den Winkel $DCE = 90^\circ$ an,

so folgt $\measuredangle\ CDE = 45^\circ$,
daher auch $\measuredangle\ HIK = 45^\circ$,
daher $\sin HKI = 0{\cdot}1380711 . \sin 45^\circ$,
somit $\log \sin HKI = \log 0{\cdot}1380711 + \log \sin 45^\circ$;
nun ist $\log 0{\cdot}1380711 = 0{\cdot}1401030 - 1$ } , welches
und $\log \sin 45^\circ = 9{\cdot}8494850 - 10$ } addirt,
gibt $9{\cdot}9895880 - 11$,
daher $\log \sin HKI = 8{\cdot}9895880 - 10$.

Diesem entspricht:

$5^\circ\ 36'\ 10''$,

es ist somit $\measuredangle\ HKI = 5^\circ\ 36'\ 10''$,
und da $HIK = 45^\circ\ 0'\ 0''$ ist,
so folgt $HKI + HIK = 50^\circ\ 36'\ 10''$,
daher $\frac{1}{2}(HKI + HIK) = 25^\circ\ 18'\ 5''$.

Substituirt man diesen Werth in die Formel IV, so hat man:

$\tang \frac{1}{2}(HCK - HKC) = 0{\cdot}1715728 . \tang 25^\circ\ 18'\ 5''$,

und

$\log \tang \frac{1}{2}(HCK - HKC) = \log 0{\cdot}1715728 + \log \tang 25^\circ\ 18'\ 5''$;
nun ist $\log 0{\cdot}1715728 = 0{\cdot}2344485 - 1$ } , welches addirt,
und $\log \tang 25^\circ\ 18'\ 5'' = 9{\cdot}6746114 - 10$ }
gibt $9{\cdot}9090599 - 11$;
daher $\tang \frac{HCK - HKC}{2} = 8{\cdot}9090599 - 10$.
Diesem entspricht: $4^\circ\ 38'\ 10''$;
es ist also $\frac{1}{2}(HCK - HKC = 4^\circ\ 38'\ 10''$,
daher $HCK - HKC = 9^\circ\ 16'\ 20''$,
und da $HCK + HKC = 50^\circ\ 36'\ 10$ ist,
so folgt $2 HCK = 59^\circ\ 52'\ 30''$,
also $HCK = 29^\circ\ 56'\ 15''$.
Da also $90 : 3 = 29^\circ\ 59'\ 60''$ ist,
und $HCK = 29^\circ\ 56'\ 15''$ gefunden wurde,
so folgt der Fehler $F = 0^\circ .. 3' .. 42''$
bei einem Winkel von 90°.

Substituirt man nun in diese 2 Formeln die Werthe für beliebige Winkel und rechnet etwa von 30 zu 30°, so findet man, wenn man den angenommenen Winkel mit φ, den gefundenen dritten Theil davon mit x und den Fehler mit F bezeichnet, folgende Resultate und Fehler:

Für	$\varphi = 10^0$	ist $x =$	$3^0\ 20'\ 5{\cdot}1''$,	daher	$F = 0^0\ 0'\ 5''$
„	$\varphi = 40^0$	„ $x =$	$13^0\ 19'\ 36{\cdot}3''$	„	$F = 0^0\ 0'\ 23{\cdot}7''$
„	$\varphi = 70^0$	„ $x =$	$23^0\ 17'\ 58''$	„	$F = 0^0\ 2'\ 2''$
„	$\varphi = 90^0$	„ $x =$	$29^0\ 56'\ 18''$	„	$F = 0^0\ 3'\ 44{\cdot}9''$
„	$\varphi = 100^0$	„ $x =$	$33^0\ 15'\ 24{\cdot}8''$	„	$F = 0^0\ 4'\ 35{\cdot}2''$
„	$\varphi = 130^0$	„ $x =$	$43^0\ 13'\ 27{\cdot}2''$	„	$F = 0^0\ 6'\ 32{\cdot}8''$
„	$\varphi = 160^0$	„ $x =$	$53^0\ 17'\ 11{\cdot}4''$	„	$F = 0^0\ 8'\ 32.4''$.

Aus dieser schematischen Darstellung der berechneten Drittel und der daraus sich ergebenden Fehler sieht man wohl deutlich ein, wie ausserordentlich genau diese Methode ist und wie weit diese Genauigkeit geht.

Man sieht daraus, dass diese Methode bis 60° auf Secunden und bis 90° auf die Minuten genau geht, denn bei 90° ist der Fehler = 3′. Halbirt man jedoch den zu theilenden Winkel, so wird man dann nach dieser Methode jeden Winkel bis 90° auf Secunden und bis 180° auf Minuten genau in 3 gleiche Theile theilen.

Wir wollen nur noch zeigen, wie man einen Winkel, der über 180° ist, nach diesem Verfahren sehr einfach in drei gleiche Theile theilen kann, wenn man ihn zuerst halbirt.

Fig. 104.



Es sei der erhabene Winkel ACB (Fig. 104), der nahe an $3R = 270^0$ ist, gegeben, welcher gedrittelt werden soll. Man trage auf den einen Schenkel, hier auf AC, eine beliebige Einheit CI dreimal auf, führe durch den Mittelpunkt C auf die gedachte Sehne DE des Ergänzungswinkels ACB zu $4R$ eine Lothrechte, welche den gegebenen Winkel, so wie den ihm entsprechenden Bogen halbirt; trage dann auch auf

der Halbirungslinie die angenommene Einheit der *CI* dreimal auf, beschreibe aus dem zweiten Theilungspunkte, hier aus *II'* über *I' III'* einen Kreis, mache ferner *CG* = *CF* und führe durch *C* auf *FG* eine Normale, welche den gegebenen Bogen in *H* und *J* schneidet; beschreibe aus *G* mit *GH* den Bogen *HK*, und aus dem so gefundenen Punkte *K* mit *KF* den Bogen *uFv*, welcher der Trisectionsbogen sein wird.

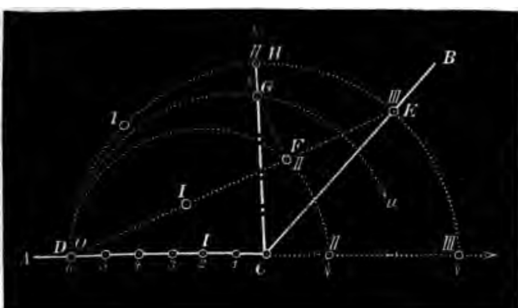
Verbindet man nun den Punkt *F* mit *D* und *E* durch Gerade, zieht in den so erfolgten Punkten *L* und *M* auf *EF* und *DF* Normale bis zu dem Trisectionsbogen und führt aus *C* durch *N* und *P* Gerade bis zu dem zu theilenden Bogen *DFE*, so wird dieser und folglich auch der ihm entsprechende Winkel in drei gleiche Theile getheilt, und zwar mit einer ausserordentlichen Genauigkeit.

Wie die Substitution, die Versuche und die Rechnung zeigen, dürfte dieses Verfahren der Glanzpunkt aller unserer erfundenen und aufgestellten Methoden sein.

XXXII. Trisections-Methode.

Ein anderes, dem letzteren ähnliches Verfahren besteht in Folgendem:


Fig. 105.

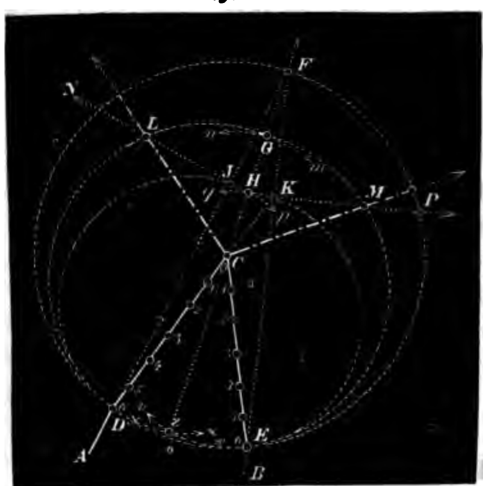


Es sei *ACB* (Fig. 105) der zu theilende Winkel; man trage auf dem einen Schenkel *AC* eine beliebige Einheit 6mal auf, beschreibe aus dem Punkte *C* mit *C*6 den Bogen *DE*, ferner aus dem ersten Theilungspunkte 1 mit *D*1 den Bogen *DGu*, welcher der Dreitheilungsbogen sein wird, und aus dem zweiten Theilungspunkte 2 mit *D*2 den Halbkreis *DFII*, welcher der geometrische Ort derjenigen Punkte sein wird, die jede beliebige im Halbkreise *DIHIII* von *D* aus gezogene Sehne im Verhältnisse wie 2 : 1 theilen.

Wird also die Sehne *DE* des gegebenen Winkels gezogen, in dem hierdurch erhaltenen Durchschnittspunkte *F* eine Normale bis zu dem Bogen *DGu* geführt, und aus dem Mittelpunkte *C*

durch den auf dem Dreitheilungsbogen *DGu* erhaltenen Punkte *G* eine Gerade geführt, so schneidet diese von dem Bogen *DE*, so wie von dem ihm entsprechenden Winkel *DCE* den dritten Theil ab.


Fig. 106.



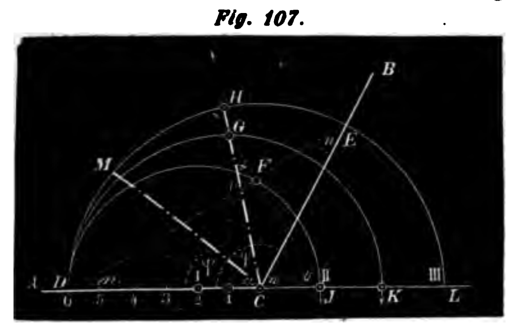
Ist der zu theilende Winkel, hier *DCE* (Fig. 106), grösser als 2 *R*, so verfahre man auf folgende Art mit einmaligem Halbiren: Man trage auf jedem der zwei Schenkel eine beliebige Einheit 6mal auf, beschreibe aus dem Scheitelpunkte *C* mit dem Halbmesser gleich sechs solchen Theilen den Bogen *DNFPE*, sodann aus dem ersten Theilungspunkte des Schenkels *CD* mit dem Halbmesser gleich fünf solchen Theilen den Bogen *Dm*, und aus dem 1. Theilpunkte des 2. Schenkels mit demselben Halbmesser den Bogen *En*; ferner aus dem zweiten Theilungspunkte des einen Schenkels mit dem Halbmesser gleich vier solchen Theilen den Bogen *Dp*, und aus dem 2. Theilungspunkte des 2. Schenkels mit demselben Halbmesser den Bogen *Eq*; führe dann aus *C* durch die Punkte *H* und *G* eine Gerade, so ist *CF* die Halbirungslinie des gegebenen Winkels, welche desto genauer bestimmt wird, je genauer die Bögen *Dp* und *Eq*, dann die Bögen *vu* und *xy* beschrieben werden und der Durchschnittspunkt *z* bestimmt wird.

Man hat also auf diese Art die Halbirungslinie, ferner diejenigen Bögen, welche den Drittel-Theil der Sehne des halben Winkels abschneiden und auch die zwei Trisections-Bogen.

Wird nun der Halbirungspunkt *F* mit *D* und *E* durch Gerade verbunden, ferner in den Punkten *J* und *K* auf jede dieser zwei Linien eine Normale gezogen und durch die dadurch auf den Trisectionsbögen erhaltenen Punkte aus dem Mittelpunkte *C* bis zu dem zu theilenden Bogen Gerade geführt, so theilen diese den gegebenen Bogen und Winkel in drei gleiche Theile.

Da diese Methode noch genauer als die vorige zu sein scheint, so wollen wir sie ebenfalls einer Rechnung unterziehen.

Fig. 107.



Es sei in Fig. 107 die Construction der Dreitheilung wie in der vorletzten Figur, und es sei überdiess der Punkt 1 der AC mit G verbunden und die FG über F hinab bis J verlängert. Setzen wir nun den zu theilenden Winkel $DCE = \varphi$, seinen Nebenwinkel $ECL = w$, den Winkel $D1G = \psi$, welcher ein äusserer Winkel des Dreieckes $CG1$ ist, und im Dreiecke $CG1$ seine inneren Gegenwinkel, d. i. $GC1 = \alpha$, $CG1 = \beta$, ferner in dem Dreiecke $JG1$ den Winkel $JG1 = x$, $CJG = y$ u. s. w., wie diess die Figur zeigt, so kann man sehr leicht die Winkel x, y und mittels dieser auch den Winkel α als Zweidrittelwinkel des Gegebenen finden.

Um den Winkel x zu finden, hat man

$$J1 : G1 = \sin x : \sin y,$$

woraus
$$\sin x = \frac{J1 \sin y}{G1} \text{ folgt.}$$

In dieser Formel sind alle drei hinter dem Gleichheitszeichen stehenden Werthe bekannt; denn setzt man $CD = 1$, so ist

$$J1 = CJ + C1 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2}, \text{ ferner } CG = \tfrac{5}{6}$$

nach der Construction,

somit
$$\sin x = \frac{\frac{1}{2} \,.\, \sin y}{\frac{5}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}} \,.\, \sin y,$$

also
$$\sin x = \tfrac{3}{5} \sin y = 0{\cdot}6 \,.\, \sin y \;\ldots\ldots\; \text{(I)}$$

als eine allgemeine Formel für die Berechnung des Werthes von x, wo der Werth 0·6 constant bleibt.

Setzt man nun den gegebenen Winkel $\varphi = 60^0$, so ist

$$w = 120^0, \text{ daher } m = n = \frac{w}{2} = 60^0,$$

und da nach der Construction $DFJ = R$, ferner $\measuredangle\, m = \frac{1}{2}\, w$ bekannt, also $= 60^0$ ist, so folgt

$$y = R - m = 90 - 60 = 30^0.$$

Man hat daher durch Substitution in Formel I:

$$\sin x = 0{\cdot}6 \,.\, \sin 30^0,$$

daher $\log \sin x = \log 0{\cdot}6 + \log \sin 30^0;$

nun ist $\log 0{\cdot}6 = 0{\cdot}7781513 - 1$

und $\log \sin 30^0 = 9{\cdot}6989700 - 10$, welches addirt,

gibt $9{\cdot}4771213 - 11;$

diesem entspricht: $17^0\ 27'\ 27{\cdot}4''$.

Es ist also $x = 17^0\ 27'\ 27'4,$

und da $y = 30^0\ 0'\ 0''$ ist,

so folgt $x + y = 47^0\ 27'\ 27'4.$

Es ist aber $x + y = \psi =$ dem äussern Winkel des Dreiecks $GJ1$, somit ist auch $\alpha + \beta = \psi$ gegeben.

Betrachten wir nun das Dreieck $GC1$, so hat man in diesem die 2 Seiten $G1$, $C1$ und den von ihnen eingeschlossenen Winkel $G1C = 180 - \psi$ bekannt. Setzt man nun $G1 = a$, $C1 = b$, so hat man:

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha - \beta}{2} = \operatorname{tang} \frac{\alpha + \beta}{2} \,.\, \frac{a - b}{a + b};$$

und da $a = \frac{5}{6}$, und $b = \frac{1}{6}$ ist,

so folgt $\operatorname{tang} \frac{\alpha - \beta}{2} = \operatorname{tang} \frac{\alpha + \beta}{2} \times \frac{\frac{5}{6} - \frac{1}{6}}{\frac{5}{6} + \frac{1}{6}}$, welches reduzirt

gibt $\operatorname{tang} \frac{\alpha - \beta}{2} = \operatorname{tang} \frac{\alpha + \beta}{2} \,.\, \frac{4}{6} = \operatorname{tang} \frac{\alpha + \beta}{2} \,.\, \frac{2}{3},$

oder $\operatorname{tang} \frac{\alpha - \beta}{2} = \operatorname{tang} \frac{\alpha + \beta}{2} \,.\, 0{\cdot}666666 \ldots$ (II).

Diess ist die 2. Formel mit dem constanten Werthe $0{\cdot}666\ldots$, mittels welcher man den Winkel α bestimmt.

Da also $\alpha + \beta = 47^0\ 27'\ 27{\cdot}4'',$

also $\frac{\alpha + \beta}{2} = 23^0\ 43'\ 43{\cdot}7''$ ist,

so hat man $\operatorname{tang} \frac{\alpha - \beta}{2} = \operatorname{tang} 23^0\ 43'\ 43{\cdot}7 \,.\, 0{\cdot}6666 \ldots$

und $\log \operatorname{tang} \frac{\alpha - \beta}{2} = \log \operatorname{tg} 23^0 43' 43{\cdot}73'' + \log 1{\cdot}666666;$

nun ist $\log \operatorname{tang} 23^0\, 43'\, 43{\cdot}7'' = 9{\cdot}6430271 - 10$, welches

und $\log 0{\cdot}666666 = 0{\cdot}8239087 - 1$ addirt,

gibt $10{\cdot}4669358 - 11;$

diesem entspricht $16^0\ 19'\ 58{\cdot}8''$.

Es ist somit $\frac{\alpha - \beta}{2} = 16^0\ 19'\ 58{\cdot}8'',$

daher $\alpha - \beta = 32^0\ 39'\ 57'6'',$

und da $\alpha + \beta = 47^0\ 27'\ 27{\cdot}1''$ ist,
so folgt $2\alpha = 80^0\ 7'\ 25''$,
folglich $\alpha = 40^0\ 3'\ 42{\cdot}5$,
daher $BCH = \frac{1}{3}\alpha = 20^0\ 3'\ 21{\cdot}25''$,
wovon der wahre Werth $= 20^0$ abgezogen, gibt den Fehler

$$F = 0^0\ 1'\ 21{\cdot}25''.$$

Es ist also der Fehler bei dem Winkel von 60^0 nur sehr gering.

Gibt man nun nach und nach dem Winkel φ verschiedene Werthe und rechnet etwa von 30 zu 30 Grade, so hat man Folgendes:

für $\varphi = 30^0$ ist $x_1 = 10^0\ 0'\ 17''$, daher $F = 0^0\ 0'\ 17''$
„ $\varphi = 48^0$ „ $x_2 = 16^0\ 1'\ 2{\cdot}75''$ „ $F = 0^0\ 1'\ 2{\cdot}75''$
„ $\varphi = 60^0$ „ $x_3 = 20^0\ 1'\ 21{\cdot}25''$ „ $F = 0^0\ 1'\ 21{\cdot}25''$
„ $\varphi = 90^0$ „ $x_4 = 30^0\ 3'\ 17{\cdot}17''$ „ $F = 0^0\ 3'\ 17{\cdot}17''$
„ $\varphi = 120^0$ „ $x_5 = 39^0\ 58'\ 28''$ „ $F = 0^0\ 1'\ 32''$
„ $\varphi = 150^0$ „ $x_6 = 49^0\ 30'\ 48{\cdot}7''$ „ $F = 0^0\ 29'\ 11{\cdot}3''$.

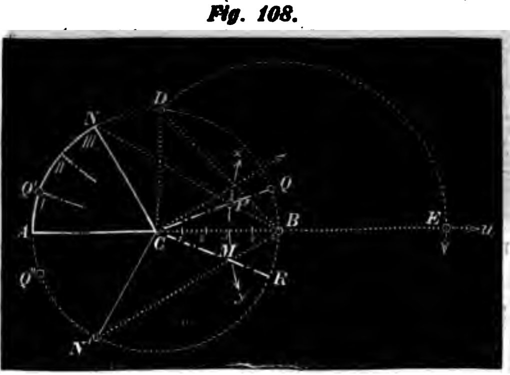
Man sieht also daraus, dass diese Methode, für die Winkel von dem kleinsten bis über 120^0, viel richtiger als die vorhergehende ist.

XXXIII. Trisections - Methode.

Das hier folgende Verfahren durch Substitution ist sehr einfach und geht bis 180^0 auf 1 Minute genau.

Construction des Trisectionsbogens.

Fig. 108.



Man trage auf der Geraden Au (Fig. 108) von irgend einem Punkte C aus eine beliebige Einheit $C1$ fünfmal auf, beschreibe aus C mit $C5 = BC$ einen Halbkreis, errichte im Punkte C eine Senkrechte, bis der Halbkreis in D geschnitten wird, mache dann $BE = BD =$ der Neunziger Sehne, und beschreibe aus dem

so erhaltenen Durchschnittspunkte E mit $E\,3$ den Bogen Mx, welcher der Trisectionsbogen eines jeden Winkels bis 90° sein wird.

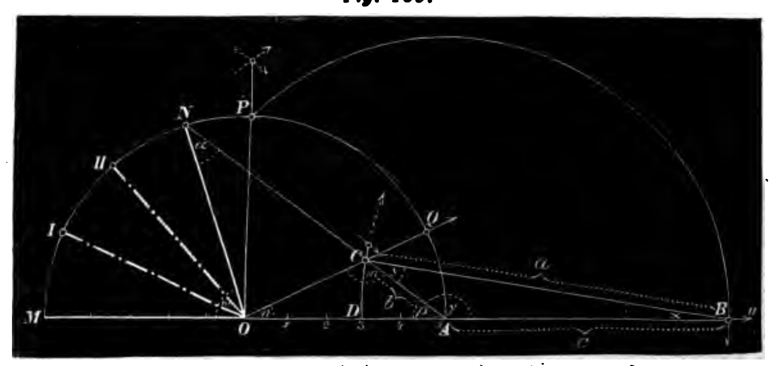
Soll nun mittels dieses Bogens irgend ein Winkel, z. B. der Winkel ACN, gedrittelt werden, so verbinde man den Punkt N mit B durch eine Gerade, welche den Bogen Mx in P schneidet, führe dann aus C durch P eine Gerade bis Q, so lässt sich BQ auf AN dreimal auftragen.

Ist der gegebene Winkel grösser als 90°, also hier in der Fig. 108 der Winkel NCN' in drei gleiche Theile zu theilen, so wird er zuerst halbirt, sodann von der einen Hälfte wie zuvor mittels des Trisectionsbogens Mx das Drittel gesucht und dieses auf NN' von A aus beiderseits aufgetragen, wodurch man für den Winkel NCN' die Punkte Q und Q, also arc $NQ' = Q'Q'' = Q''N' = \frac{1}{3}NN'$ erhält.

Da diese Methode bis 180° mit einer sehr grossen Genauigkeit geht, dabei aber höchst einfach ist, und die Construction sich auch durch Rechnung begründen lässt, so wollen wir diess auch wirklich thun und durch Rechnung nachweisen, wie gross der Fehler dabei ist.

Um nun zu zeigen, wie gerechnet werden soll, oder wie man hier den Fehler ausmitteln kann, setzen wir in Fig. 109, der Kürze

Fig. 109.



wegen, den zu theilenden Winkel, hier $\measuredangle MON = w$, $\measuredangle ANO = \alpha$, $\measuredangle NAO = \beta$, $\measuredangle ABC = x$, $\measuredangle ACB = y$, $\measuredangle BAC = \gamma$, $\measuredangle ACO = m$ und $\measuredangle AOC = n$; nehmen wir nun einen beliebigen Winkel an, hier z. B. den Winkel $MON = w = 60^\circ$, so ist, da $w = \alpha + \beta$ und $NO = AO$ ist, auch $\alpha = \beta$,

daher $w = \alpha + \beta = 2\alpha = 2\beta = 60^0$;

somit $\frac{w}{2} = \alpha = \beta = 30^0$,

da nun β bekannt, also $= 30^0$ ist, so ist auch γ bekannt, und zwar ist $\gamma = 150^0$; da wir aber $AB =$ der Neunziger-Sehne gemacht, $AO = 1$ und $AD = \frac{2}{5} = 0{\cdot}4$ gesetzt haben, so ist in dem Dreiecke ABC die Seite AB, BC und der der grösseren Seite gegenüberliegende $\measuredangle\ \gamma$ bekannt.

Wir können daher auch die übrigen Stücke dieses Dreieckes berechnen. Setzen wir ferner der Kürze wegen

$$BC = a,\ AC = b,\ AB = c,$$

so folgt: $a : c = \sin\gamma : \sin y$,

daraus $\sin y = \frac{c \sin\gamma}{a}$.

Da nun $c = \sqrt{2},\ a = 0{\cdot}4 + \sqrt{2}$ ist,

so folgt $\sin y = \frac{\sqrt{2}}{0{\cdot}4 + \sqrt{2}} \cdot \sin\gamma \ldots\ldots (1)$,

da ferner $\gamma = 150$ ist,

so hat man $\sin y = \frac{\sqrt{2}}{0{\cdot}4 + \sqrt{2}} \cdot \sin 150^0$,

daher $\log\sin y = \log\sqrt{2} + \log\sin 150^0 - \log(0{\cdot}4 + \sqrt{2})$;

da nun $\sqrt{2} = 1{\cdot}4142135$

und $\sin 150^0 = \sin 30^0$ ist,

so hat man $\sin y = \frac{1{\cdot}4\ 42135 \cdot \sin 30^0}{1{\cdot}8142135}$

und $\log\sin y = \log 1{\cdot}4142135 + \log\sin 30^0 - \log 1{\cdot}8142135$.

Nun ist	$\log 1{\cdot}4142135 = 0{\cdot}1505150$	welches ad-
und	$\log\sin 30^0 = 9{\cdot}6989700 - 10,$	dirt,
gibt	$9{\cdot}8494850 - 10,$	wovon
	$\log 1{\cdot}81421355 = 0{\cdot}2586886$	abgezogen,
gibt	$\log\sin y = 9{\cdot}5907964 - 10,$	
diesem entspricht	$22^0\ 56'\ 22''$.	

Es ist also $\measuredangle\ y = 22^0\ 56'\ 22''$,

und da $\measuredangle\ \gamma = 150^0$ ist,

so folgt $x = 2R - (\gamma + y) = 7^0\ 3'\ 38''$.

Da also $\measuredangle\ x$ bekannt ist, so kann man jetzt auch die Seite b finden; denn es ist:

$$b : c = \sin x : \sin y,$$

woraus $$b = \frac{c \sin x}{\sin y};$$

und durch Substitution der obbestimmten Werthe

$$b = \frac{\sqrt{2} \sin 7^\circ\, 3'\, 38''}{\sin 22^\circ\, 56'\, 22''} = \frac{1{\cdot}41421356 \sin 7^\circ\, 3'\, 38''}{\sin 22^\circ\, 56'\, 22''};$$

daher

$$\log b = \log 1{\cdot}41421356 + \log \sin 7\;\; 3'\, 38'' - \log \sin 22^\circ\, 56'\, 22''.$$

Nun hat man	$\log 1{\cdot}41421356 =$	$0{\cdot}1505150$	welches
und	$\log \sin 7^\circ\, 3'\, 38'' =$	$9{\cdot}0896163-10,$	addirt,
gibt		$10{\cdot}2401313-11,$	wovon
	$\log \sin 22^\circ\, 56'\, 22'' =$	$9{\cdot}5907950-10$	abgezogen,
gibt	$\log b =$	$0{\cdot}6493363-1;$	
diesem entspricht die Zahl		$0{\cdot}4460014,$	
daher ist	$b =$	$0{\cdot}4460014.$	

Betrachten wir jetzt das Dreieck ACO, in welchem die zwei Seiten AO, AC und der Winkel $CAO = \beta$ bekannt ist, so hat man nach der bekannten Formel, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bekannt ist:

$$\operatorname{tang} \frac{m-n}{2} = \frac{r-b}{r+b} \cdot \operatorname{cotang} \frac{\beta}{2} \quad \ldots \ldots \text{(II)},$$

in welche Formel die gehörigen Werthe substituirt,

gibt $$\operatorname{tang} \frac{m-n}{2} = \frac{1 - 0{\cdot}44600141}{1 + 0{\cdot}44600141} \operatorname{cotang} \frac{30^\circ}{2}$$

$$= \frac{0{\cdot}5539986}{1{\cdot}4460014} \operatorname{cotang} 15^\circ,$$

und $$\log \operatorname{tang} \frac{m-n}{2} = \log 0{\cdot}5539986 + \log \operatorname{cotang} 15^\circ - \log 1{\cdot}4460014;$$

nun ist	$\log 0{\cdot}5539986 =$	$0{\cdot}7435086-1$	welches ad-
und	$\log \operatorname{cotang} 15^\circ =$	$10{\cdot}5719475-10$	dirt,
gibt		$11{\cdot}3154561-11,$	wovon
	$\log 1{\cdot}4460014 =$	$0{\cdot}1601687$	abgezogen,
gibt		$11{\cdot}1552874-11,$	
somit	$\log \operatorname{tang} \frac{m-n}{2} =$	$10{\cdot}1552874-10;$	
diesem entspricht		$55^\circ\, 1'\, 54'',$	

also ist $\frac{m-n}{2} = 55^0\ 1'\ 54''$,

daher $m-n = 110^0\ 8'\ 48''$;

und da $m+n = 149^0\ 59'\ 60''$ ist,

so folgt $2n = 39^0\ 56'\ 12''$,

somit $n = 19^0\ 58'\ 4''$;

es ist aber $60^0 : 3 = 19^0\ 59'\ 60''$,

somit der Fehler $F = 0^0\ 1'\ 56''$,

d. h. der nach obiger Construction gefundene Winkel als der dritte Theil ist um $0^0\ 1'\ 56''$ zu klein.

Um nun die weitere Rechnung etwas zu erleichtern, kann man in der ersten Formel den Ausdruck $\frac{\sqrt{2}}{0{\cdot}4+\sqrt{2}}$, welcher vermöge der Construction bei jedem zu theilenden Winkel constant bleibt, vereinfachen, indem man den Zähler durch den Nenner dividirt. Auf diese Art erhält man

$$\sin y = 0{\cdot}77951871 \,.\, \sin \gamma \;\ldots\; (\mathrm{I}).$$

Mittels dieser Formel kann man also sehr leicht die Werthe von y, und mittels der zweiten die Werthe für m und n finden.

Man erhält also auf diese Art:

für $w = 30^0$, $\sphericalangle\, n = 10^0\ 0'\ 11''$ daher $F = 0^0\ 0'\ 11''$

„ $w = 60^0$, $\sphericalangle\, n = 19^0\ 58'\ 4''$ „ $F = 0^0\ 1'\ 56''$

„ $w = 80^0$, $\sphericalangle\, n = 26^0\ 49'.23''$ „ $F = 0^0\ 8'\ 37''$,

woraus sich die Genauigkeit der obigen Construction ergibt.

Will man nach dieser Methode jeden beliebigen Winkel bis 180^0 theilen und das Drittel auf einmal abnehmen, so braucht man nur den Trisectionsbogen Mx (Fig. 108) nach abwärts unterhalb der BC zu verlängern und für den Winkel NCN' den Punkt N' mit B zu verbinden u. s. w., wodurch man unterhalb in der Peripherie den Punkt R, somit

$$\text{arc}\, QR = \tfrac{1}{3}\,\text{arc}\, NAN' \text{ und } \sphericalangle QCR = \tfrac{1}{3} \sphericalangle NCN'$$

erhält.

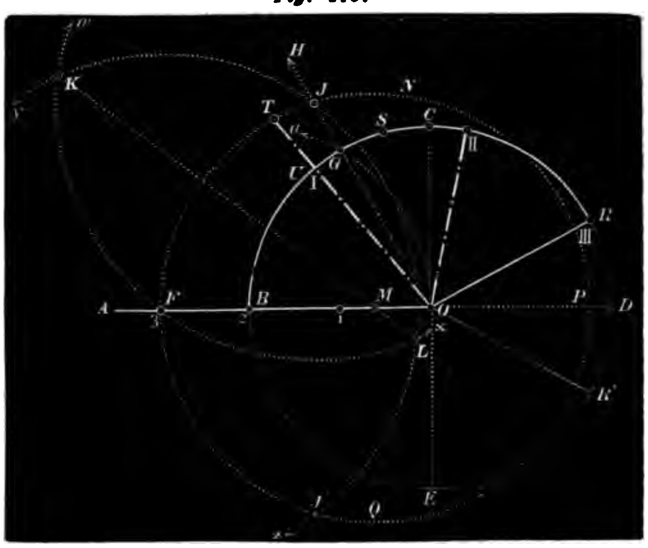
XXXIV. Trisections-Methode.

Diese Methode ist eine allgemein rationelle, jeden beliebigen Winkel bis 180^0 in drei gleiche Theile zu theilen und zwar mit einem äusserst geringen Fehler.

Man trage auf dem einen Schenkel des gegebenen Winkels,

hier (Fig. 110) auf dem Schenkel *A O* des Winkels *A O R* von *O*

Fig. 110.



aus ein beliebiges Stück *O* 1 dreimal auf; beschreibe aus *O* mit *O* 2 einen Kreis, welcher der zu theilende sein wird, errichte in *O* die *O C* ⊥ *B O*, wodurch man den Winkel *B O C* = 90° erhält, und mache den Winkel *B O G* = 60°. Nun beschreibe man aus 3 mit dem Halbmesser gleich der gedachten Neunziger-Sehne *BC* den Bogen *yz*, und aus *J* mit demselben Halbmesser den Bogen *x w*, wodurch man die zwei Punkte *L* und *K* erhält. Alsdann ziehe man die *L K*, welche die *B O* in *M* schneidet, und beschreibe aus *M* mit *M* 3 den Kreis *F N D Q*, so ist dieser der Trisectionskreis und zwar der für eine mit ihm übereinstimmende Trisectionscurve substituirte.

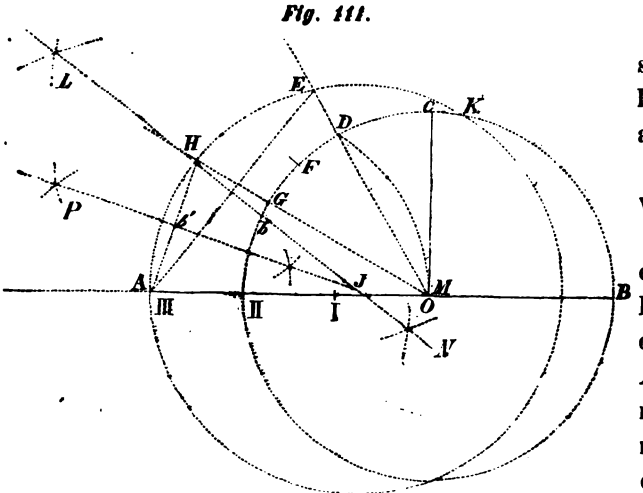
Soll nun irgend ein Winkel, z. B. der Winkel *B O R*, dessen zu theilender Bogen *B R* ist, trisecirt werden, so trage man die Sehne des halben Bogens, d. i. die gedachte *BS*, auf den Bogen *FN* von *F* aus (von 3) einmal auf und verbinde den hierdurch erhaltenen Punkt *T* mit dem Scheitelpunkte *O* durch eine Gerade, welche den Bogen *B R* in *U* oder *I* schneidet, und so den Bogen *B U* = $\frac{1}{3}$ *B R*, also auch den Winkel *B O U* = $\frac{1}{3}$ *A O R* gibt.

Wie die Construction zeigt, ist der Bogen *F T J* ein Trisectionsbogen für jeden beliebigen Winkel bis 180°, weil die Gerade *J O*

den Winkel von 180° in drei gleiche Theile theilt, und die Weite $SB = FT$ ist; folglich wird jede Sehne des halben zu theilenden Winkels, auf FN aufgetragen, einen Punkt geben, dessen Entfernung vom Punkte F geringer ist, als die des Punktes S von B.

Soll nach dieser Methode irgend ein Winkel, der grösser ist als 90°, gedrittelt werden, so muss er halbirt und die Sehne des halben Winkels, so wie hier die gedachte BS, benützt werden. Hierbei kommen die Theilungspunkte, so wie die Theillinien an Ort und Stelle, wo sie sein sollten. Den obigen Trisectionskreis kann man viel richtiger dadurch erhalten, indem man ausser den zwei Punkten F und J auch noch einen dritten solchen Punkt bestimmt, welcher die Eigenschaft hat, dass er mit dem Mittelpunkte O verbunden, den dritten Theil des Bogens und Winkels von 90° abschneidet.

Fig. 111.



In Fig. 111 sind die drei Punkte A, H, E auf diese Art bestimmt worden. Denn trägt man eine beliebige Einheit auf dem Schenkel AM von M nach A dreimal auf, so dass der 3. Punkt, d. i. III, hier mit A zusammenfällt, und denkt man sich den zu theilenden Winkel sehr klein oder vielmehr $= 0$, so muss in diesem Falle der Punkt A die obige Eigenschaft streng mathematisch haben, für den Winkel, welcher am Punkt II den Bogen $= 0$ hat. Macht man ferner den Bogen $IID = 60^\circ = \frac{1}{3} 2R = \frac{180}{3}$, zieht aus M durch D eine Gerade und schneidet sie aus A mit der Sehne des halben Winkels von 180°, also mit der Neunziger-Sehne IIC aus A in E ein, so hat auch dieser Punkt die Eigenschaft, dass er mit dem Mittelpunkte M verbunden, den dritten Theil des Winkels von 180° abschneidet, weil der Winkel $AME = 60^\circ = \frac{1}{3} 2R$ ist. Macht man nun den Bogen $IIG = 30^\circ = \frac{1}{3} R = \frac{90}{3}$, zieht aus M durch G eine Ge-

rade und schneidet diese aus A mit der Sehne des halben Winkels von 90°, also mit der Fünfundvierziger-Sehne HF aus A in H ein, so hat auch dieser die Eigenschaft, dass er mit dem Mittelpunkte M verbunden, die Dreitheilung des rechten Winkels gibt.

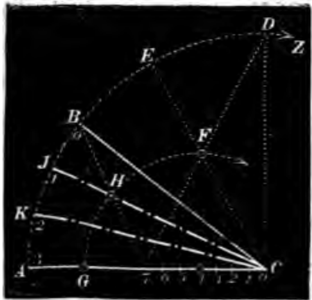
Hat man nun die drei Punkte A, H, E auf diese Art bestimmt, so lässt sich sehr leicht der Mittelpunkt, somit auch der Radius finden, um durch diese drei Punkte einen Kreisbogen zu beschreiben. Verbindet man nun den Punkt A mit H und E durch Gerade, halbirt diese Gerade und legt durch den Halbirungspunkt der AE die Normale LN und durch den der AH die zweite Normale PJ, so schneiden sich diese bei J, geben also J als Mittelpunkt und die Weite $AJ = HJ = EJ$ als Radius für den durch A, H, E zu beschreibenden Kreis, dessen Bogen AHE der Trisectionsbogen für jeden beliebigen Winkel bis 180° sein muss.

Trägt man nun die Sehne des halben Bogens von was immer für einem Winkel, der zwischen 0 und 180° gegeben ist, auf dem Bogen AHE von A aus und verbindet den so erfolgten Punkt dieses Bogens mit dem Mittelpunkte M durch eine Gerade, so ist diese die verlangte Theillinie. Obgleich dieses Verfahren eine sehr grosse Genauigkeit gewährt, so ist sie doch beim praktischen Zeichnen nicht so vortheilhaft, da sie etwas länger als manche andere aufhält; ausser man hätte mehrere Winkel zu theilen. Die Substitution kann aber auf eine viel einfachere Art geschehen, so dass daraus auch andere Methoden folgen.

XXXV. Trisections-Methode.

Ein höchst einfaches, zugleich aber auch sehr richtiges Verfahren ist folgendes:


Fig. 112.



Man trage auf den Schenkel AC (Fig. 112) von C aus eine beliebige Einheit $C1$ siebenmal auf, markire den vierten und siebenten Theilungspunkt, und mache $A7 = C7$, so dass $AC = 14$ solchen Einheiten wird; nun beschreibe man aus C mit AC den Bogen AZ, ziehe $CD \perp AC$ in C, schneide den Bogen AD aus A mit AC in E ein, verbinde E mit C und D mit 7, wodurch man den Punkt F er-

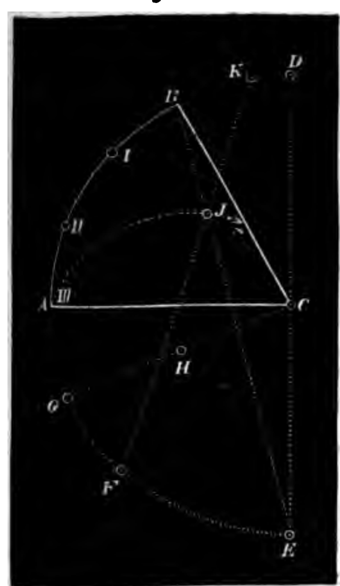
hält; wird nun aus 4 mit $F4$ der Bogen FG beschrieben, so ist dieser der Trisectionsbogen für jeden beliebigen Winkel bis 90°.

Soll nun z. B. der Winkel ACB gedrittelt werden, so verbinde man den Punkt B mit 7 durch eine Gerade, welche den Bogen FG in H schneidet, und führe dann aus C durch H eine Gerade, welche sowohl von dem Winkel als auch von dem Bogen den dritten Theil abschneidet. Es wird also arc $BJ = \frac{1}{3} AB$ und der Winkel $BCJ = \frac{1}{3} ACB$ sein.

Wird $A7$ in G halbirt, so benützt man diesen Punkt und braucht daher weder die Senkrechte CD, noch die Punkte E und F zu suchen, wodurch dieses Verfahren sehr vereinfacht wird. Der Bogen FHG ist äusserst genau für die Trisectionscurve substituirt.

XXXVI. Trisections-Methode.

Fig. 113.



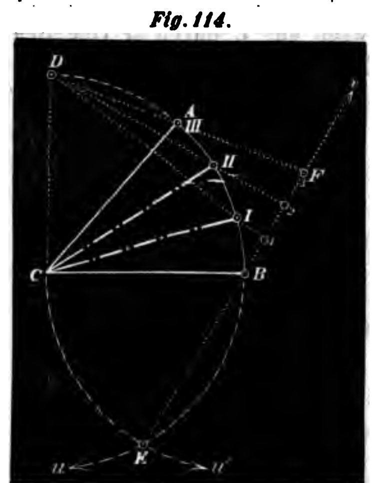
Soll der Winkel ACB (Fig. 113) in drei gleiche Theile getheilt werden, so ziehe man durch den Scheitelpunkt C auf AC eine Senkrechte und verlängere den Bogen AB beiderseits so, dass die durch C geführte Senkrechte in D und E geschnitten wird; theile dann den Quadranten AE in zwei, und dessen Hälfte AF ebenfalls in zwei gleiche Theile; ziehe ferner den Halbmesser CG, halbire ihn in H und beschreibe aus diesem Halbirungspunkte mit dem Radius gleich der Entfernung AH den Bogen Ax, welcher der Trisectionsbogen sein wird und zwar nicht nur von diesem, sondern auch von einem jeden beliebigen Winkel, der nicht grösser als ein Rechter ist.

Um nun mittels eines solchen Bogens z. B. den Winkel ACB in drei gleiche Theile zu theilen, verbinde man den Punkt B mit E durch eine Gerade, welche den Bogen Ax in J schneidet, führe dann aus F durch J eine zweite Gerade, bis der Bogen AD in K geschnitten wird, so lässt sich das hierdurch erhaltene Stück BK auf dem gegebenen Bogen AB mit einer sehr grossen Genauigkeit dreimal auftragen, so dass dann $BK = \frac{1}{3} AB$ gesetzt werden kann.

Dasselbe gilt auch von jedem andern Winkel, der unter 90^0 ist. Ueber 90^0 gilt dieser Bogen nicht mehr.

XXXVII. Trisections-Methode.

Fig. 114.



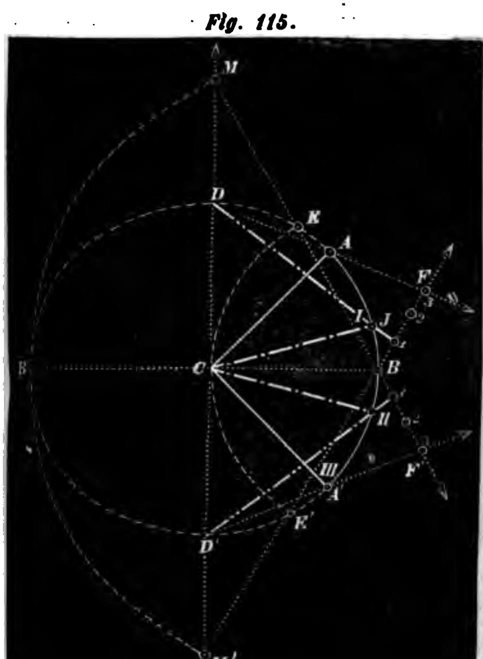
Es sei ACB (Fig. 114) der zu theilende Winkel und AB der ihm entsprechende Bogen. Man beschreibe diesen Bogen noch weiter nach auf- und abwärts, errichte im Scheitelpunkte C eine Senkrechte, also $CD \perp BC$ in C, durchschneide den Bogen BEu mit dem Radius $= BC$ aus B in E, führe aus E durch B eine Gerade Ev und durchschneide sie mit einer aus D durch A geführten zweiten Geraden in F; wird endlich das Stück BF in 3 gleiche Theile getheilt und die so erhaltenen Theilungspunkte mit dem Punkte D durch gerade Linien verbunden, so wird durch diese der gegebene Bogen AB in drei gleiche Theile getheilt, so dass man

$$\text{arc } BI = I,II = II\,III \text{ und } \measuredangle BCI = ICII = IICIII$$

erhält. Untersucht man diese Construction nach der geometrischen Analysis etwas genauer, und denkt sich die Gerade EF um den Punkt B zuerst gegen die horizontale, dann aber auch gegen die vertikale Richtung gedreht, während der Punkt D so wie B fix, also unverändert bleiben; nimmt man nun über dies auf dem Bogen des zu theilenden Winkels, hier auf AB, die Theile $AII = II\,I = IB$ an, führt bei der jedesmaligen Stellung der EF aus dem Punkte D durch die Punkte I, II, III Transversale, bis EF geschnitten ist, so werden die auf der Geraden BF abgeschnittenen Stücke $B1$, $1{\cdot}2$, $2{\cdot}3$ mehr oder weniger sich der Gleichheit nähern und es wird auch das Umgekehrte stattfinden; d. h. es werden sich die auf dem zu theilenden Bogen AB durch die Transversalen $D1$, $D2$, $D3$ abgeschnittenen Stücke ebenfalls mit solcher Genauigkeit mehr oder weniger der Gleichheit nähern. Unter allen diesen Stellungen der EF wird für die Gleichheit diejenige am günstigsten sein, wenn der von BC und EF gebildete Winkel $CBE = 60^0$ wird; wo-

durch auch die Untersuchung durch Rechnung bedeutend erleichtert wird.

Fig. 115.



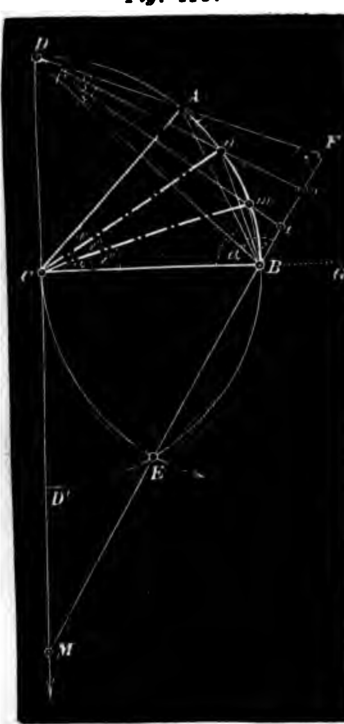
Nimmt man ferner auch den Punkt D als beweglich an, so kann man für diesen Fall mit Bezugnahme auf die Stellung der Geraden $E\ F$ verschiedenen andern Arten für Dreitheilung des Winkels finden.

Will man den gegebenen Bogen und Winkel, welcher bedeutend gross ist, in drei gleiche Theile theilen, so muss man folgender Massen verfahren: Man ergänze den gegebenen Bogen $A\ B\ A'$ (Fig. 115) zu einem Kreise, halbire den ihm entsprechenden Winkel, hier den $\measuredangle ACA'$ durch BC, führe durch den Scheitelpunkt C dieses Winkels auf dessen Halbirungslinie eine Senkrechte; hier $MM' \perp BC$; durchschneide diese Senkrechte mit einem aus B mit dem Radius gleich $BB' = 2\,BC$ beschriebenen Bogen in M und M' und den Kreis mit dem Radius gleich BC aus B in E und E'; führe dann durch M, E, B, so wie durch M', E', B Gerade, und durchschneide sie entsprechend mit den aus D und D' durch A und A' geführten Geraden, wodurch man die Punkte F und F' erhält. Wird endlich jedes der zwei Stücke BF und BF' in drei gleiche Theile getheilt und die ersten Theilungspunkte (von B aus gezählt) mit D und D' durch Gerade verbunden, so erhält man auf dem gegebenen Bogen AB die Durchschnittspunkte I und II als die verlangten Theilungspunkte, wodurch arc $AI = III = II\,III$ wird; verbindet man ferner I und II mit C, so hat man auch

$$\measuredangle ACI = ICII = IICIII = \tfrac{1}{3} ACA';$$

dadurch wird aber der gegebene Winkel ACA' auch in 6 gleiche Theile getheilt; denn es ist

Fig. 116.



$$\measuredangle ACB = A'CB = \tfrac{1}{2} ACA',$$

und weil

$$\measuredangle ICH = \tfrac{1}{3} ACA' \text{ ist,}$$

so muss

$$\measuredangle ICB = \tfrac{1}{6} ACA' \text{ sein.}$$

Wir wollen nun dieses Verfahren näher untersuchen; vorerst haben wir aber zweierlei zu bemerken: *a)* dass die aus M oder E durch B (Fig. 116) geführte Gerade ihrer Richtung nach constant bleibt und zwar jedesmal unter einem Winkel von 60^0 gegen die Verlängerung der BC gezogen wird; wesshalb entweder der Punkt E in der Peripherie des Halbkreises DBD' mit dem Radius BC aus B, oder der Punkt M in der durch C auf BC geführten Normalen DM aus B mit dem doppelten Radius bestimmt wird (der Genauigkeit wegen sollen aber beide Punkte gesucht werden); *b)* dass diejenigen Winkel, welche von der Sehne AB des gegebenen Winkels und von der aus D durch A geführten Geraden gebildet werden, ebenfalls constant bleiben. Der eine von diesen zwei Winkeln, d. i. der

$$\measuredangle BAD \text{ ist } = \frac{3R}{2} = 135^0$$

und der andere,

d. i. der $\quad \measuredangle BAF, \text{ ist } = \frac{R}{2} = 45^0;$

denn der Winkel BAD ist ein Peripherie-Winkel, welcher auf einem Bogen aufsteht, dessen Centri-Winkel $= 3R$ ist nach der Construction, folglich, da

$$\measuredangle DCD' + D'CB = 3R \text{ ist,}$$

so ist $\quad \measuredangle DAB = \frac{3R}{2} = 135^0,$

und da $\quad \measuredangle DAB + BAF = 2R$ ist,

so muss

$$\measuredangle BAF = 2R - \frac{3R}{2} = \frac{4R - 3R}{2} = \frac{R}{2} = 45^\circ \text{ sein.}$$

Diese zwei constanten Grössen setzen uns in den Stand, unsere Untersuchung desto genauer auszuführen. Zu diesem Behufe werden wir zuerst das Stück BF berechnen, sodann den dritten Theil des gegebenen Bogens und Winkels als bekannt annehmen, daraus das Stück $B1$ suchen und sehen, ob $B1$ der dritte Theil von BF ist.

Es sei also

$\measuredangle ACB = \alpha = 20^\circ$, dessen Sehne $AB = 0{\cdot}3472964$ ist,

daher

$$\measuredangle CAB = ABC = \alpha' = \alpha'' = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = \frac{160}{2} = 80^\circ.$$

Da nun

$\measuredangle FBG = CBE = 60^\circ$ ist,

so hat man

$$\measuredangle ABF = \delta = 180^\circ - (ABC + FBG) = 180^\circ - (80 + 60)$$
$$= 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ,$$

daher $\measuredangle AFB = 180^\circ - (45 + 40) = 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ = \gamma$.

Wir können somit das Stück BF finden, denn es ist in dem Dreiecke ABF ausser den drei Winkeln auch die Seite AB bekannt; man hat daher:

$$AB : BF = \sin\gamma : \sin\alpha,$$

woraus $BF = \dfrac{AB \sin\alpha}{\sin\gamma}$ folgt,

und durch Substitution der entsprechenden Werthe hat man:

$$BF = \frac{0{\cdot}3472964 \sin 45^\circ}{\sin 95^\circ} = \frac{0{\cdot}3472964 \sin 45^\circ}{\sin 85^\circ}$$

daher $\log BF = \log 0{\cdot}3472964 + \log\sin 45^\circ - \log\sin 85^\circ$;

nun ist	$\log. 0{\cdot}3472964 =$	$0{\cdot}5407003 - 1$	welches addirt,
und	$\log\sin 45^\circ =$	$9{\cdot}8494850 - 10$	
gibt		$10{\cdot}3901853 - 11$,	
hievon	$\log\sin 85^\circ =$	$9{\cdot}9983442 - 10$	abgezogen,
gibt	$\log BF =$	$0{\cdot}3918411 - 1$;	
diesem entspricht	$=$	$0{\cdot}24651373$.	

Es ist also $BF = 0{\cdot}24651373$,

daher $\dfrac{BF}{3} = 0{\cdot}24651373 : 3 = 0{\cdot}08213791 = B1$,

somit $B2 = \frac{2}{3} BF = 0{\cdot}16427582$.

Da nun das Stück BF und folglich auch das Stück $F2$ bekannt ist, so können wir aus dem Dreiecke $DF2$ den Winkel $ADn = y$ finden; wir brauchen nur noch das Stück AF zu berechnen; dieses finden wir durch folgende Proportion:

$$AF : BF = \sin\delta : \sin a,$$

woraus $$AF = \frac{BF \sin\delta}{\sin a} \text{ folgt;}$$

und durch Substitution der betreffenden Werthe hat man

$$AF = \frac{0{\cdot}2465137 . \sin 40^0}{\sin 45^0},$$

daher $\log AF = \log 0{\cdot}2465137 + \log\sin 40^0 - \log\sin 45^0$,

nun ist $\log 0{\cdot}2465137 = 0{\cdot}3918411 - 1$
und $\log\sin 40^0 = 9{\cdot}8080675 - 10$, welches addirt,
gibt $10{\cdot}1999086 - 11$,
hievon $\log\sin 45^0 = 9{\cdot}8494850 - 10$ abgezogen,
gibt $0{\cdot}3504236 - 1$;
diesem entspricht $0{\cdot}22409$,
also ist $AF = 0{\cdot}22409$,
und da $AD = \text{Chord } 70^0 = 1{\cdot}1471528$ ist,
so hat man $AD + AF = DF = 1{\cdot}3712428$.

Es ist somit in dem Dreiecke $DF2$, die Seite DF und $F2$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel γ bekannt.

Setzen wir der Kürze wegen die Seite $DF = a$, $F2 = b$, den $\measuredangle FD2 = y$ und $F2D = x$, so hat man:

$$(a + b) : (a - b) = \text{tang}\,\frac{x+y}{2} : \text{tang}\,\frac{x-y}{2},$$

woraus $$\text{tang}\,\frac{x-y}{2} = \frac{a-b}{a+b} . \text{tang}\,\frac{x+y}{2} \text{ folgt;}$$

daher $$\log\text{tang}\,\frac{x-y}{2} = \log(a-b) + \log\text{tang}\,\frac{x+y}{2} - \log(a+b).$$

Da nun $a = 1{\cdot}3712428$
und $b = 0{\cdot}0821379$ ist,
so hat man $a + b = 1{\cdot}4533807$,
und $a - b = 1{\cdot}2891049$;
da ferner $x + y = 180^0 - 95^0 = 85^0$,
also $\frac{x+y}{2} = \frac{180 - 95}{2} = \frac{85}{2} = 42^0\,30'$ ist,

so hat man durch Substitution in die obige Formel:

$$\text{tang}\,\frac{x-y}{2} = \frac{1{\cdot}2891049}{1{\cdot}4533807}\,\text{tang}\,42^0\,30',$$

daher $\log \text{tang} \frac{x-y}{2} = \log 1{\cdot}2891049 + \log \text{tang}\ 42^0\ 30'$
$- \log 1{\cdot}4533807$;

nun ist $\log 1{\cdot}2891049 = 0{\cdot}1102883$
und $\log \text{tang}\ 42^0\ 30' = 9{\cdot}9620525 - 10$ }, welches addirt,
gibt $10{\cdot}0723408 - 10$,
hievon $\log 1{\cdot}4533807 = 0.1623553$ abgezogen,
gibt $\log \text{tang} \frac{x-y}{2} = 9{\cdot}9099855 - 10$;
diesem entspricht $39^0\ 6'\ 15''$.

Es ist also: $\frac{x-y}{2} = 39^0\ 6'\ 15''$,
daher $x - y = 78^0\ 12'\ 30''$,
und da $x + y = 85^0\ \ 0'\ \ 0''$ ist,
so folgt $2x = 163^0\ 12' 30''$,
daher $x = 81^0\ 36'\ 15''$
und $2y = 6^0\ 47'\ 30''$,
somit $y = 3^0\ 23'\ 45''$.

Da nun y der entsprechende Peripheriewinkel ist von dem Winkel ACn,
so ist $\measuredangle\ ACn = 2y = 6^0\ 47'\ 30''$;
es ist aber $\alpha = 20^0$ angenommen,
also $\frac{\alpha}{3} = 20^0 : 3 = 6^0\ 40'$,
folglich ist der Fehler, den man nach unserer Construction begeht, gleich der Differenz dieser zwei Werthe, daher:

$$F = 6^0\ 47'\ 30'' - 6^0\ 40' = 0^0\ 7'\ 30''.$$

Es ist daher der Winkel

$$BCn = 20^0 - 6^0\ 47'\ 30'' = 19^0\ 59'\ 60'' - 6^0 47'\ 30'' = 13^0\ 12'\ 30'',$$

folglich der Winkel $BCm = \frac{BCn}{2} = 6^0\ 36'\ 15''$,
und daher der Fehler $0^0\ 3'\ 45''$.

Wir können aber den Winkel BCm auch auf eine andere Art, nämlich dadurch finden, indem wir zuerst den Winkel ADm suchen, welcher aus dem Dieiecke DFI gefunden werden kann.
Denn da $BF = 0{\cdot}24651373$ ist,
so ist $\frac{2}{3} BF = 0{\cdot}16427582 = b'$;
man wird daher in der obigen Formel nur statt b einen andern Werth zu substituiren haben;

da nun $a = 1{\cdot}3712428$

und $b' = 0{\cdot}1642758$ ist,

so folgt $a + b' = 1{\cdot}5355186$

und $a - b' = 1{\cdot}2069670$;

daher $\operatorname{tang} \frac{x' - y'}{2} = \frac{1{\cdot}2069670}{1{\cdot}5355186} . \operatorname{tang} 42^0 30'$

und $\log \operatorname{tang} \frac{x' - y'}{2} = \log 1{\cdot}2069670 + \log \operatorname{tang}$

$- \log 1{\cdot}53$

nun ist $\log 1{\cdot}206967 = 0{\cdot}0816954$

und $\log \operatorname{tang} 42^0 30' = 9{\cdot}9620525 - 10$ }, welches

gibt $10{\cdot}0437479 - 10$,

hievon $\log 1{\cdot}5355186 = 0{\cdot}1862551$ abgezogen,

gibt $\log \operatorname{tang} \frac{x' - y'}{2} = 9{\cdot}8574928 - 10$;

diesem entspricht $35^0\ 45'\ 50''$;

es ist also $\frac{x' - y'}{2} = 35^0\ 45'\ 50''$,

somit $x' - y' = 71^0\ 31'\ 40''$,

und da $x' + y' = 85^0\ 0'\ 0''$ ist,

so folgt $2x' = 156^0 31' 40''$,

daher $x' = 78^0\ 15'\ 50''$.

Eben so findet man durch Subtraction dieser zwei Gleic

$2y' = 13^0\ 28'\ 20''$

und $y' = 6^0\ 44'\ 10''$.

Es ist also $2y' = BCn = 13^0\ 28'\ 20''$.

Da nun $BCn = \frac{2}{3}$ von $20^0 = 13^0 20'$ ist,

so hat man, da $2y' = 13^0\ 28'\ 20''$ gefunden wu

und $BCn = 13^0\ 20'$ als der wahre W

den Fehler $F = 0^0\ 8'\ 20''$.

Ziehen wir den Werth $2y'$ von 20^0 ab, so haben wir, da

$20^0 = 19^0\ 59'\ 60''$ gesetzt werd

und $\sphericalangle\ BCu = 2y' = 13^0\ 28'\ 20''$ gefunden wu

die Differenz $D = 6^0\ 31'\ 40''$.

Zieht man nun diesen Werth von dem wahren ab, so hat

der wahre Werth $W = 6^0\ 39'\ 60''$ ist,

und $D = 6^0\ 31'\ 40''$ gefunden wu

den Fehler $F = 0^0\ 8'\ 20''$.

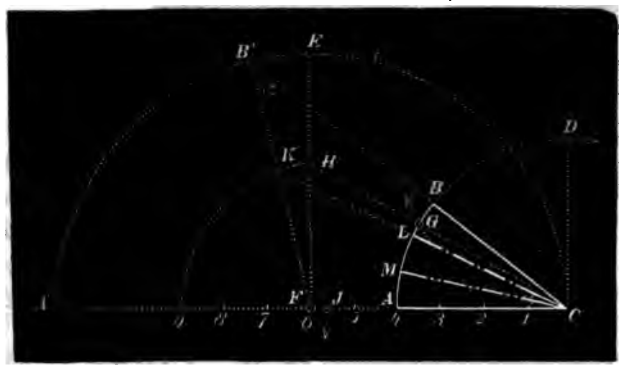
Auf ähnliche Art kann man also auch bei jedem Winkel die Fehler der Drittel berechnen.

Diese Construction ist desshalb bemerkenswerth, weil man sie zur Polysection mit Vortheil benützen kann. Man kann sie aber, wie wir aus dem vorhergehenden Beispiele sehen, zur Trisection benützen, indem der Fehler so klein ist, dass man ihn bei gewöhnlichen Zeichnungen nicht zu beachten braucht.

XXXVIII. Trisections-Methode.

Man trage auf dem einen Schenkel des gegebenen Winkels,

Fig. 117.



hier auf *AC* (Fig. 117), eine beliebige Einheit *C* 1 neunmal auf, beschreibe dann aus *C* mit dem Radius *C* 4 = vier solcher Einheiten den einen Quadranten, und aus dem sechsten Theilungspunkte mit *C* 6 = sechs solcher Einheiten einen Halbkreis, errichte in den beiden Mittelpunkten auf die Centrallinie *CF* senkrechte Halbmesser, schneide dann den Viertelkreis *AD* aus *D* mit *DC* in *G* ein, führe aus *C* durch *G* eine Gerade, bis der vertikale Halbmesser *EF* in *H* geschnitten ist, schneide ferner die Centrallinie aus 9 mit *H* 6 in *J* ein, und beschreibe aus *J* mit *JH* den Trisectionsbogen *H* 9. Wird nun *BC* bis *B'* verlängert, sodann *B'* mit *F* verbunden und aus dem so erhaltenen Punkte *K* nach *C* eine Gerade gezogen, so schneidet diese von dem Bogen *AB* das Bogenstück $BL = \frac{1}{3} AB$ ab. Macht man nun arc $LM = BL$,

so folgt arc $BL = LM = AM = \frac{1}{3} AB$

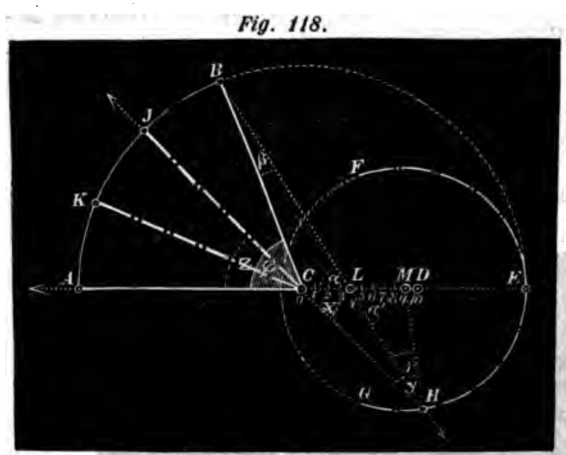
und *L* so wie *M* durch Gerade mit *C* verbunden, gibt auch

$$\measuredangle BCL = LCM = ACM = \frac{1}{3} ACB.$$

Wir wollen uns aber bei dieser Art in keine weiteren Rechnungen einlassen, weil diese Methode nur bis 45° genau ist.

XXXIX. Trisections-Methode.

Fig. 118.



Es sei *ACB* (Fig. 118) der zu theilende Winkel. Man verlängere den Schenkel *AC* über den Scheitelpunkt *C* hinaus, nehme eine beliebige Einheit *C*1 an und trage sie auf der Verlängerung von *AC* zehnmal auf; markire insbesondere den vierten, neunten und zehnten Theilungspunkt, mache dann $DE = CD = 10$ solcher Einheiten und beschreibe aus *C* mit *CE* den Halbkreis *ABE* und aus 9 mit *E*9 einen Kreis, von welchem der Bogen *FEG* ein Trisectionsbogen sein wird.

Um nun mittels dieses Bogens den Winkel *ACB* in drei gleiche Theile zu theilen, führe man aus *B* durch den vierten Theilungspunkt (4) eine Gerade bis *H* und aus *H* durch *C* eine zweite Gerade bis *J*, so erfolgt arc $BJ = \frac{1}{3} AB$
und der Winkel $BCJ = \frac{1}{3} ACB$.
Macht man nun $JK = BJ$,
so erhält man arc $BJ = KJ = AK = \frac{1}{3} AB$
und ebenso $\measuredangle BCJ = JCK = KCA = \frac{1}{3} ACB$,
welches für jeden beliebigen Winkel bis 90° äusserst genau geht.

Wir wollen nun die Genauigkeit dieser Methode durch Rechnung begründen:

Um dies zu bewerkstelligen, werden wir zuvor den Winkel $ACB = \varphi$ als bekannt annehmen, und der Einfachheit wegen den Halbmesser des Grundkreises, d. i. $AC = 1$ setzen; ferner den Punkt *M* als Mittelpunkt des Trisectionsbogens mit dem sich durch Verlängerung der *BL* ergebenden Punkte *H* durch eine Gerade verbinden.

Betrachtet man jetzt zuerst das Dreieck BCL, setzt in diesem den Winkel $CBL = \alpha$, $\measuredangle\ BLC = \beta$, so hat man:

$$\measuredangle\ ACB = \varphi = \alpha + \beta$$

und $$\measuredangle \tfrac{1}{2} ACB = \frac{\varphi}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2};$$

setzt man ferner $$BC = a = r = 1$$

und $$CH = b,$$

so hat man, da nach der Construction der Halbmesser des Trisectionsbogens (d. i. $CD = DE = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} r = \frac{1}{2}$) in 10 gleiche Theile getheilt wurde,

$$CL = \tfrac{4}{20}\, CD = \tfrac{1}{5}\, CE = \tfrac{1}{5} r = 0{\cdot}2.$$

Es ist daher im Dreiecke BCL alles das gegeben, was zur Auflösung erforderlich ist; man hat demnach:

$$\text{tang}\, \frac{\alpha - \beta}{2} = \text{tang}\, \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \frac{BC - CL}{BC + CL}$$

oder $$\text{tang}\, \frac{\alpha - \beta}{2} = \text{tang}\, \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \frac{a - b}{a + b} \; \ldots \; (\text{I});$$

da aber $$BC = a = r = 1 \text{ gesetzt wurde}$$

und $$CL = b = \tfrac{4}{20} r = 0{\cdot}2$$

nach der Construction ist, so hat man

$$BC + CL = a + b = r + \tfrac{4}{20} r = 1 + 0{\cdot}2 = 1{\cdot}2$$

und $$BC - CL = a - b = r - \tfrac{4}{20} r = 1 - 0{\cdot}2 = 0{\cdot}8;$$

welche Werthe in die obige Gleichung (I) substituirt, gibt:

$$\text{tang}\, \frac{\alpha - \beta}{2} = \text{tang}\, \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \frac{0{\cdot}8}{1{\cdot}2} \; \ldots \; (\text{II}).$$

Da aber nach der gegebenen Construction die zwei Linien

$$BC = a = r = 1$$

und $$CL = b = \tfrac{4}{20} r = 0{\cdot}2$$

ihrer Grösse nach ungeändert bleiben, so wird auch der Quotient $\frac{a - b}{a + b}$ constant sein müssen; man hat daher, indem

$$\frac{1{\cdot}2}{0{\cdot}8} = 12 : 8 = 0{\cdot}6$$

ist, statt der Formel (II) folgende einfachere:

$$\text{tang}\, \frac{\alpha - \beta}{2} = \text{tang}\, \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot 0{\cdot}6 \; \ldots \; (\text{III}).$$

Gibt man nun dem Winkel $\varphi = \alpha + \beta$ nach und nach verschiedene Werthe, so lässt sich mittels der Formel (III), da

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

ist, die Differenz $\alpha - \beta$ berechnen.

Setzt man also $\varphi = 60^0 = \alpha + \beta$,

so ist $$\frac{\varphi}{2} = 30^0 = \frac{\alpha+\beta}{2};$$

man hat daher durch Substitution in (III)

$$\text{tang}\,\frac{\alpha-\beta}{2} = \text{tang}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,.\,0{\cdot}6 = \text{tang}\,30^0\,.\,0{\cdot}6$$

und $\log\text{tang}\,\frac{\alpha-\beta}{2} = \log\text{tang}\,30^0 + \log 0{\cdot}6$;

nun ist $\log\text{tang}\,30^0 = 9{\cdot}7614394 - 10$
und $\log 0{\cdot}6666666 = 0{\cdot}8239087 - 1$, welches addirt,

gibt $\log\text{tang}\,\frac{\alpha-\beta}{2} = 9{\cdot}5853481 - 10$;

diesem entspricht: $21^0\ 3'\ 6''$.

Es ist also $$\frac{\alpha-\beta}{2} = 21^0\ 3'\ 6'',$$

daher $\alpha - \beta = 42^0\ 6'\ 12''$
und da $\alpha + \beta = 60^0\ 0'\ 0''$ ist,
so folgt $2\alpha = 102^0\,6'\ 12''$,
somit $\alpha = 51^0\ 3'\ 6''$.

Zieht man jetzt das Dreieck HLM in Betracht, setzt den Winkel $HLM = \alpha'$, $\measuredangle\, LHM = \gamma$; ferner die Seite $LM = m$ und $HM = n$, so hat man:

$$LM : HM = \sin\gamma : \sin\alpha'$$

oder $m : n = \sin\gamma : \sin\alpha'$,

woraus $$\sin\gamma = \frac{m\,.\sin\alpha'}{n} \;.\;.\;.\;.\; \text{(IV)}$$

folgt. Nun ist aber der Construction gemäss

$$LM = m = \tfrac{5}{10}CD = \tfrac{5}{20}CE = \tfrac{5}{20}r = \tfrac{5}{20} = 0{\cdot}25$$

und $HM = n = \tfrac{11}{10}CD = \tfrac{11}{20}CE = \tfrac{11}{20}r = \tfrac{11}{20} = 0{\cdot}55$;

man hat daher durch Substitution in die Formel (IV):

$$\sin\gamma = \frac{0{\cdot}25}{0{\cdot}55}\,.\,\sin\alpha' \;.\;.\;.\;.\; \text{(V)}.$$

Da aber vermöge der Construction die Linien m und n ihrer Grösse nach ungeändert bleiben, so wird auch der Faktor $\frac{0{\cdot}25}{0{\cdot}55}$ constant sein; man hat demnach, da

$$0{\cdot}25 : 0{\cdot}55 = 0{\cdot}4545 \;.\;.\;.\;. = 0{\cdot}\dot{4}\dot{5} \text{ ist,}$$

$$\sin \gamma = 0{\cdot}\dot{4}\dot{5} \,.\, \sin \alpha' \; \ldots \; (VI)$$

als eine einfache Formel, mittels welcher sich der Winkel γ, bei jeder Annahme des zu theilenden Winkels φ sehr leicht berechnen lässt; und da nach der Construction der Winkel $\alpha' = \alpha$ ist (als Scheitelwinkel), so folgt:

$$\sin \gamma = 0{\cdot}\dot{4}\dot{5} \,.\, \sin \alpha, \; \ldots \; (VI'),$$

in welcher Formel der obgefundene Werth für α substituirt, gibt

$$\sin \gamma = 0{\cdot}\dot{4}\dot{5} \,.\, \sin 51^0\ 3'\ 6'',$$

und $\log \sin \gamma = \log 0{\cdot}\dot{4}\dot{5} + \log \sin 51^0\ 3'\ 6''$;

nun ist $\log 0{\cdot}4545454 = 0{\cdot}6575773 - 1$

und $\log \sin 51^0\ 3'\ 6'' = 9{\cdot}8908194 - 10$, welches addirt,

gibt $\log \sin \gamma = 9{\cdot}5483967 - 10$;

diesem entspricht: $20^0\ 42'\ 6{\cdot}8''$.

Es ist also $\gamma = 20^0\ 42'\ 6{\cdot}8''$;

und wenn man zu diesem Winkel den Winkel $\alpha = \alpha'$ hinzuaddirt, so folgt:

$$\alpha' + \gamma = 71^0\ 45'\ 12{\cdot}8''.$$

Setzt man ferner in dem Dreiecke CHM den Winkel $HCM = x$, und $CHM = y$, so hat man, da

$$\alpha' + \gamma = y + z = \measuredangle EMH \text{ ist,}$$

$$x + y = 71^0\ 45'\ 12{\cdot}8''$$

als die Summe der zwei innern Gegenwinkel im Dreiecke CHM, bezüglich des äussern Winkels EMH.

Man kann demnach aus dem Dreiecke CHM die Winkel x und y, somit auch z als den Zweidrittelwinkel von ACB berechnen; denn es ist in diesem Dreiecke:

$$(HM + CM) : (HM - CM) = \text{tang}\,\frac{x+y}{2} : \text{tang}\,\frac{x-y}{2},$$

woraus
$$\text{tang}\,\frac{x-y}{2} = \text{tang}\,\frac{x+y}{2} \,.\, \frac{HM - CM}{HM + CM} \; \ldots \; (VII)$$

folgt. Da aber $HM = \frac{11}{10} = 1{\cdot}1$

und $CM = \frac{9}{10} = 0{\cdot}9$ ist, nach der Construction,

so folgt $HM + CM = 1{\cdot}1 + 0{\cdot}9 = 2$

und $HM - CM = 1{\cdot}1 - 0{\cdot}9 = 0{\cdot}2$;

daher durch Substitution in die obige Formel, folgt:

$$\text{tang}\,\frac{x-y}{2} = \text{tang}\,\frac{x+y}{2} \,.\, \frac{0{\cdot}2}{2} \; \ldots \; (VIII);$$

und da auch bei diesem Dreiecke die zwei Seiten HM und CM

vermöge der Construction ungeändert bleiben, so wird der Faktor $\frac{0 \cdot 2}{2}$ constant sein. Da also:

$$0 \cdot 2 : 2 = 0 \cdot 1 \text{ ist,}$$

so folgt: $$\operatorname{tang} \frac{x-y}{2} = \operatorname{tang} \frac{x+y}{2} \, . \, 0 \cdot 1$$

oder $$\operatorname{tang} \frac{x-y}{2} = \operatorname{tang} \frac{x+y}{2} \, . \, \tfrac{1}{10} \quad \ldots \quad \text{(IX)}$$

Substituirt man hier statt $\frac{x+y}{2}$ den obbestimmten Werth, so hat man

$$\operatorname{tang} \frac{x-y}{2} = \operatorname{tang} \; 35^0 \; 52' \; 36 \cdot 4'' \, . \, \tfrac{1}{10}$$

und $$\log \operatorname{tang} \frac{x-y}{2} = \log \operatorname{tang} 35^0 \; 52' \; 36 \cdot 4'' - \log \; 10;$$

nun ist $\log \operatorname{tang} 35^0 \, 52' \, 36 \cdot 4'' = 9 \cdot 8592955 - 10$ }
und $\log 10 = 1 \cdot 0000000$ }, welches addirt,

gibt $$\log \operatorname{tang} \frac{x-y}{2} = 8 \cdot 8592955 - 10;$$

diesem entspricht: $4^0 \;\; 8' \;\; 12''$.

Also ist $$\frac{x-y}{2} = 4^0 \;\; 8' \;\; 12'',$$

daher $x - y = 8^0 \; 16' \; 24''$

und da $x + y = 71^0 \; 45' \; 12 \cdot 8''$ gefunden wurde,

so folgt $2x = 80^0 \, 1' \; 36 \cdot 8''$,

daher $x = 40^0 \, 0' \; 48 \cdot 4''$.

Da nun $x = z = \measuredangle \; ACJ = \tfrac{2}{3} \; ACB$ ist,

so hat man $z = 40^0 \;\; 0' \;\; 48 \cdot 4''$;

es ist aber $\frac{\varphi}{3} = \tfrac{1}{3} ACB = 60 : 3 = 20^0$,

und $\tfrac{2}{3}\varphi = \tfrac{2}{3} \; ACB = 2 \times 20 = 40^0$,

daher folgt der Fehler $F = 0^0 \;\; 0' \;\; 48 \cdot 4''$,

d. h. es ist der nach dieser Construction gefundene Winkel $z = \tfrac{2}{3}\varphi$ um $0^0 \;\; 0' \, 48 \cdot 4''$ zu gross, daher der Winkel BCJ als der dritte Theil von ACB um $0^0 \;\; 0' \;\; 48 \cdot 4''$ zu klein.

Halbirt man jedoch den Winkel $ACJ = z$, so hat man

$$\tfrac{1}{2} \; ACJ = \tfrac{1}{2} \; z = 20^0 \;\; 0' \;\; 24'' = \tfrac{1}{3}\varphi.$$

Es wird daher der in diesem Falle begangene Fehler $F = 0^0 \, 0' \, 24''$ sein; welches offenbar ein äusserst geringer Fehler ist.

Man kann also auf diese Art die Fehler auch bei jedem andern Winkel mittels der drei entwickelten Formeln:

$$1)\quad \text{tang}\,\frac{\alpha-\beta}{2} = \text{tang}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,.\,0{\cdot}6 \;\ldots\ldots\; (III),$$

$$2)\quad \sin\gamma = 0{\cdot}\dot{4}\dot{5}\,.\,\sin\alpha \;\ldots\ldots\; (VI),$$

und

$$3)\quad \text{tang}\,\frac{x-y}{2} = \text{tang}\,\frac{x+y}{2}\,.\,\frac{1}{10} \;\ldots\ldots\; (IX),$$

sehr leicht berechnen, und zwar wird mittels Formel (III) der Winkel $\alpha' = \alpha$ in Graden gefunden, mittels (VI) wird γ, somit auch $x+y$ bestimmt, und mittels (IX) wird $x = z = \frac{2}{3}\varphi$ berechnet.

Rechnet man nun so fort von 10 zu 10 Grade, so findet man bis zu dem Winkel von 90° folgende Resultate und Fehler:

Für $\varphi = 10^0$ ist $\frac{1}{2}z = \frac{1}{3}\varphi = 3^0 20' 6''$, daher $F = 0^0 0' 6''$,
„ $\varphi = 20^0$ „ $\frac{1}{2}z = \frac{1}{3}\varphi = 6^0 40' 2{\cdot}3''$ „ $F = 0^0 0' 2{\cdot}8''$,
„ $\varphi = 30^0$ „ $\frac{1}{2}z = \frac{1}{3}\varphi = 10^0 0' 6{\cdot}5''$ „ $F = 0^0 0' 6{\cdot}5''$,
„ $\varphi = 40^0$ „ $\frac{1}{2}z = \frac{1}{3}\varphi = 13^0 20' 11{\cdot}2''$ „ $F = 0^0 0' 11{\cdot}2''$,
„ $\varphi = 50^0$ „ $\frac{1}{2}z = \frac{1}{3}\varphi = 16^0 40' 20{\cdot}3''$ „ $F = 0^0 0' 20{\cdot}3''$,
„ $\varphi = 60^0$ „ $\frac{1}{2}z = \frac{1}{3}\varphi = 20^0 0' 24''$ „ $F = 0^0 0' 24''$,
„ $\varphi = 70^0$ „ $\frac{1}{2}z = \frac{1}{3}\varphi = 23^0 20' 24''$ „ $F = 0^0 0' 24''$,
„ $\varphi = 80^0$ „ $\frac{1}{2}z = \frac{1}{3}\varphi = 26^0 40' 24''$ „ $F = 0^0 0' 24''$,
„ $\varphi = 90^0$ „ $\frac{1}{2}z = \frac{1}{3}\varphi = 30^0 0' 46{\cdot}6''$ „ $F = 0^0 0' 46{\cdot}6''$.

Diess zeigt nun deutlich, wie ausserordentlich die Genauigkeit bei dieser Methode ist; denn schon einige Minuten haben beim gewöhnlichen Zeichnen keinen besonderen Einfluss, da hier aber nur Secunden vorkommen, so können diese als Null angesehen werden; und es ist daher diese Methode äusserst genau.

Rechnet man nun so fort von 10 zu 10 Grad auch für diejenigen Winkel, welche grösser als 90° sind, so findet man schon grössere Fehler, denn

für $\varphi = 100^0$ ist $\frac{1}{2}z = \frac{1}{3}\varphi = 33^0 22' 40{\cdot}2''$, daher $F = 0^0 2' 40$,
„ $\varphi = 110^0$ „ $\frac{1}{2}z = \frac{1}{3}\varphi = 36^0 47' 48{\cdot}6''$ „ $F = 0^0 7' 48{\cdot}6''$,
„ $\varphi = 120^0$ „ $\frac{1}{2}z = \frac{1}{3}\varphi = 40^0 17' 53{\cdot}2''$ „ $F = 0^0 17' 53{\cdot}2''$

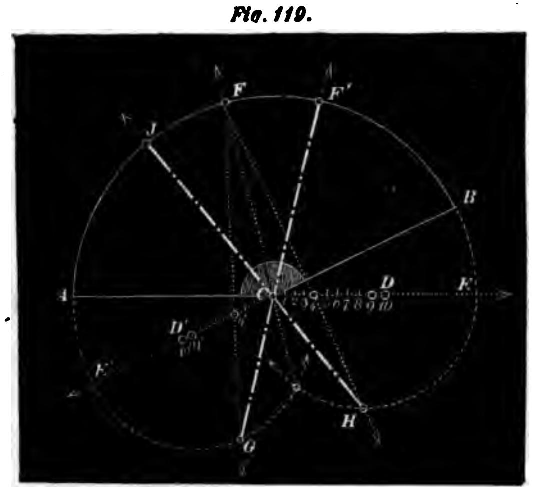
u. s. w. Man sieht also daraus, dass man dieses Verfahren noch bis zu dem Winkel $\varphi = 120^0$ anwenden könnte. Ueber diesen Winkel hinaus wächst der Fehler rasch, so dass der Fehler bei $\varphi = 140^0$ grösser als 1^0 wird.

Wird jedoch der zu theilende Winkel zuerst halbirt, so kann

man nach diesem Verfahren jeden Winkel bis 180° auf Sekunden genau trisecciren.

Ist der Winkel grösser als 90° oder auch schon nahe an 180°, so wie z. B. der Winkel *ACB* (Fig. 119), so verlängere man beide

Fig. 119.



Schenkel des gegebenen Winkels über den Scheitelpunkt *C* hinaus, trage von dem Scheitelpunkte aus auf beiden Verlängerungen eine beliebige Einheit, hier *C* 1, zehnmal auf, mache *CE* = *CE'* = 20 solcher Einheiten (indem man *DE* = *CD* und ebenso *E'D'* = *CD'* macht), beschreibe aus *C* mit *CE* den Bogen *E'ABE*, halbire den Bogen *AB* in *F*, führe aus diesem Punkte durch 4 und 4' zwei Gerade bis *G* und *H* und aus jedem dieser Punkte ziehe man durch den Mittelpunkt *C* abermals Gerade bis *J* und *F'*, wodurch $AJ = JF' = BF' = \frac{1}{3} AB$ erhalten wird.

Dieses Verfahren ist selbst dann vorzüglich, wenn der Halbmesser ziemlich gross angenommen wird, weil man mit der Construction über den Theilungskreis nicht hinauszugehen braucht.

Vergleicht man diese Construction mit jeder der 38 vorhergehenden, so findet man, dass sie von allen diesen die richtigste ist, indem sie, bei ihrer Einfachheit von dem kleinsten Winkel angefangen bis zu jenem von 90°, den Fehler nur in Secunden gibt, ohne dass man den gegebenen Winkel zuerst halbirt. Geschieht aber dieses zuerst, so wie in der vorhergehenden Figur, dann wird auch jeder Winkel von 0 bis 90° desto sicherer auf Secunden genau gedrittelt; und zwar wird der Fehler geringer als 20 Secunden sein, denn beim Winkel $\varphi = 45^0 = \frac{1}{2} R$ ist er kleiner als 20 Secunden, da er bei $\varphi = 50^0$ nur 20 Secunden beträgt. Dasselbe gilt auch von jedem Winkel, der grösser als *R* und kleiner als 2 *R* ist.

Diese Methode dürfte daher nächst der oberwähnten ein zweiter Glanzpunkt der hierin niedergelegten Erfindungen sein.

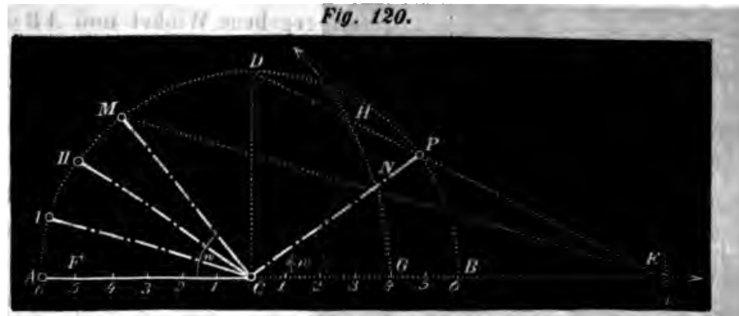
XL. Trisections-Methode

mittels eines Substitutionsbogens, wornach man stets $\frac{2}{3}$ des gegebenen Winkels findet.

Construction des Trisectionsbogens.

Man trage eine beliebige Einheit von irgend einem Punkte einer Geraden, hier in Fig. 120, auf *AE* das Stück *C* 1 von *C* aus nach den

Fig. 120.



beiden Richtungen 6mal auf, so dass dann *C* 6 = *C* 6 oder *AC* = *BC* ist; beschreibe über *AB* einen Halbkreis *ADB*, mache *BE* = *BC* = *AC*, errichte im Punkte *C* eine Senkrechte, verbinde *D* mit *E* durch eine Gerade und beschreibe dann aus dem Theilungspunkte *F* (oder 5) der *AC* mit dem Halbmesser *FG* = der Summe von 9 Einheiten einen Bogen *GH*, welcher von der Geraden *DE* in *H* geschnitten wird, so ist der Bogen *GH* der Trisectionsbogen.

Sollte nun mittels dieses Bogens irgend ein Winkel gedrittelt werden, z. B. der Winkel *ACM*, so verbinde man den Punkt *M* mit *E* durch eine Gerade, welche den Theilungsbogen in *N* schneidet, und ziehe aus dem Mittelpunkte *C* durch den so auf dem Bogen *GH* erhaltenen Punkt *N* eine Gerade bis zu der Peripherie, so ist das hierdurch auf dem Halbkreise *ADB* abgeschnittene Stück $BP = \frac{2}{3} AM$.

Wird nun der Bogen *BP* in Zirkel gefasst und auf dem zu theilenden Bogen *AM* einmal von *A* und das anderemal von *M* aus aufgetragen, so erhält man

$$\text{arc}\, AI = I\,II = II\,M = \tfrac{1}{3} AM,$$

somit, wenn die Punkte *I* und *II* mit *C* verbunden werden, auch

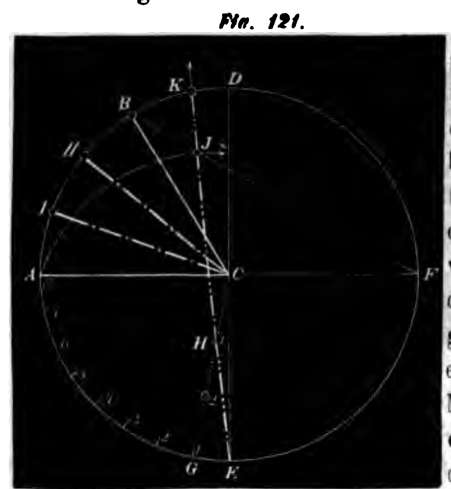
$$\measuredangle\, ACI = IC\,II = II\,CM = \tfrac{1}{3} ACM.$$

XLI. Trisections - Methode

ebenfalls mittels eines substituirten Bogens, welche insoferne vortheilhafter als die vorhergehende ist, als man mit den Hilfslinien und Hilfspunkten gar nicht über den zu theilenden Kreis hinaus zu gehen braucht.

Diese dem vorhergehenden Verfahren ähnliche Methode besteht also in Folgendem:

Fig. 121.



Es sei ACB (Fig. 121) der gegebene Winkel und AB der ihm entsprechende Bogen. Man ergänze den Bogen des gegebenen Winkels zu einem Kreise, führe durch den Mittelpunkt C den Durchmesser $DE \perp AC$, verlängere AC bis F, theile den Quadranten AE in acht gleiche Theile, verbinde den ersten Theilungspunkt mit dem Mittelpunkte und theile den so erhaltenen Halbmesser CG in drei gleiche Theile; wird endlich aus dem ersten Theilungspunkte H (oder 1) mit dem Radius gleich der Entfernung AH der Bogen Ax beschrieben, so ist dieser der Trisectionsbogen für jeden beliebigen Winkel bis nahe an 90°.

Um nun mittels eines solchen Bogens z. B. den Winkel ACB in drei gleiche Theile zu theilen, verbinde man den Punkt B mit F durch eine Gerade und führe aus dem Punkte E durch J eine zweite Gerade bis zu dem Bogen AD, wodurch arc $BK = \frac{1}{3} AB$ abgeschnitten wird. Macht man nun AI und $BII = BK$, so folgt:

$$\text{arc } AI = III = IIB = \tfrac{1}{3} AB$$

und

$$\measuredangle\ ACI = ICII = IICIII = \tfrac{1}{3} ACB.$$

XLII. Trisections-Methode

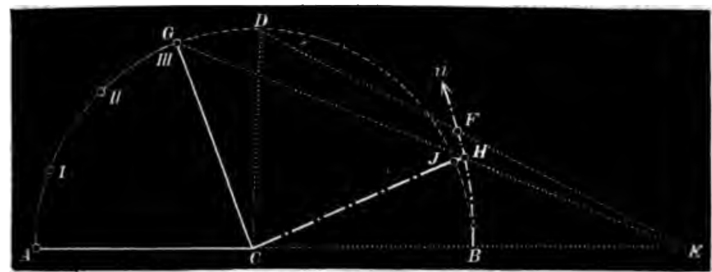
mittels eines Substitutionsbogens ausserhalb des Grundkreises.

Nach der hier folgenden Methode kann jeder beliebige Winkel bis 90° gleichmässig, ohne dass der Fehler wächst, mit sehr grosser Genauigkeit gedrittelt werden.

Construction des Trisectionsbogens.

Man beschreibe über der Geraden *A B* (Fig. 122) einen Halb-

Fig. 122.

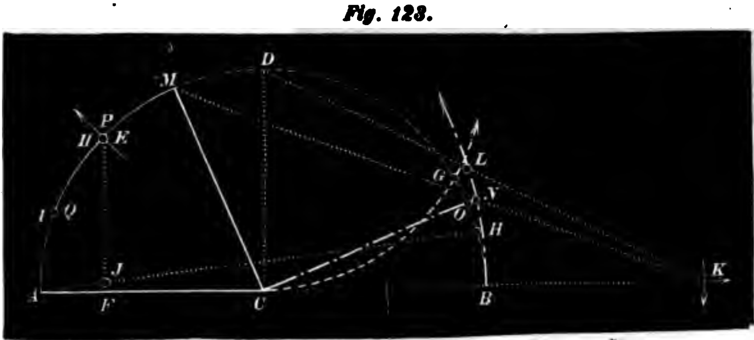


kreis *A D B*, mache *B E* = *B C*, beschreibe aus *A* mit dem Radius gleich *A B* einen Bogen *B u*, errichte in *C* eine Senkrechte, welche den Halbkreis *ADB* in *D* trifft, und verbinde *D* mit *E*, so ist das hierdurch von *B u* abgeschnittene Stück *B F* ein Trisectionsbogen für jeden beliebigen Winkel bis 90°, wobei der Fehler nicht mit der Grösse des Winkels wächst, sondern constant bleibt.

Sollte nun mittels dieses Bogens irgend ein Winkel gedrittelt werden, z. B. der Winkel *A C G* (Fig. 122), so verbinde man den Punkt *G* mit *E* durch eine Gerade, welche den Trisectionsbogen *BF* in *H* schneidet und ziehe auch die Gerade *CH*, wodurch das Bogenstück *B J* = $\frac{1}{3}$ *A G* erhalten wird und zwar bei unsern gewöhnlichen Constructionen mit einer sehr grossen Genauigkeit.

Ueber den Punkt *F* hinaus darf man aus dem Grunde nicht gehen, weil dieser Bogen nur ein Substitutionsbogen für eine Trisectionscurve ist, welche noch bei *F* sehr genau mit dem Substitutionsbogen übereinstimmt, dann aber über *F* rasch eine starke Krümmung annimmt, die von dem Kreisbogen *B u* bedeutend abweicht.

Fig. 123.



Bei Zeichnungen von grösserem Massstabe wird man den Mittelpunkt für den Substitutionsbogen auf folgende Art finden: Man zeichne wie zuvor einen Halbkreis *ADB* (Fig. 123) und errichte im Punkte *C* eine Lothrechte *CD*; alsdann halbire man den Quadranten *AD* in *E*, fälle aus *E* auf *AB* eine Lothrechte *EF*, durchschneide aus *D* mit *CD* den Bogen *BD* in *G*, halbire *BG* in *H* und verbinde diesen Punkt mit *A* durch eine Gerade, welche die Lothrechte *EF* in *J* trifft und diesen Punkt als den Mittelpunkt für den Trisectionsbogen gibt. Wird nun aus *J* mit der Entfernung *BJ* der Bogen *BL* beschrieben, ferner *D* mit *K* durch eine Gerade verbunden, so ist der dadurch abgeschnittene Bogen *BL* der Trisectionsbogen für jeden beliebigen Bogen bis 90°; und zwar selbst bei Zeichnungen von grösserem Massstabe mit einer ausserordentlichen Genauigkeit.

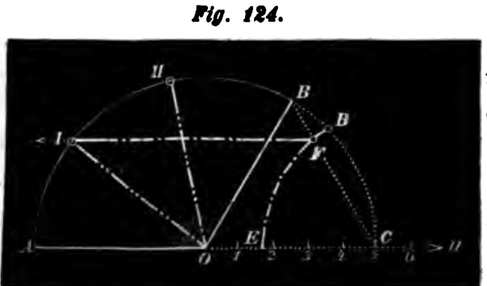
Was nun die Dreitheilung betrifft, so ist das Verfahren wie zuvor; man verbindet nämlich den Punkt *M* des Schenkels *CM* von dem zu theilenden Winkel *ACM* mit dem Punkte *K* durch eine Gerade u. s. w. wie bereits gezeigt wurde.

XLIII. Trisections-Methode

mittels eines Substitutionsbogens innerhalb des zu theilenden Kreises.

Diese Methode ist eine derjenigen, nach welchen man bei der Construction nur wenig über den Grundkreis hinauszugehen braucht.

Fig. 124.



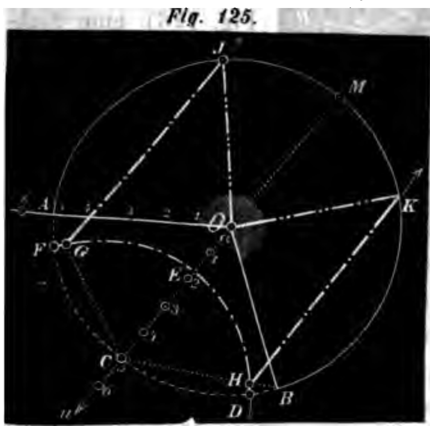
Es sei *A O B* (Fig. 124) der zu theilende Winkel und *AB* der ihm entsprechende Bogen. Man verlängere den einen Schenkel *AO* über *O* hinaus, nehme auf demselben das Stück *O* 1 beliebig an und trage es darauf 6mal auf; beschreibe dann aus *O* mit *O* 5 einen Halbkreis, schneide von demselben durch die aus *O* unter 45° bis *D* geführte Gerade den vierten Theil ab und beschreibe endlich aus dem Theilungspunkte 6 der Geraden *Ou* mit der Entfernung *D* 6 den Bogen *DE*, so ist dieser der Trisectionsbogen für jeden beliebigen Winkel von 0 bis 135°.

Soll nun mittels dieses Bogens z. B. der Winkel *AOB* gedrit-

telt werden, so verbinde man den Punkt *B* mit *C* durch eine Gerade (d. h. man ziehe die Sehne des Ergänzungswinkels *BOC* zu 180°), welche den Trisectionsbogen in *F* schneidet; wird alsdann durch *F* die $FI \parallel AC$ gezogen, so wird das Stück $AI = \frac{1}{3} AB$ abgeschnitten. — Es lässt sich also *AI* auf dem Bogen *AB* dreimal mit grosser Genauigkeit auftragen.

Sollte nun irgend ein Winkel, der über 180° und auch nahe an 3*R* ist, gedrittelt werden, z. B. der erhabene Winkel *AOB* (Fig. 125), so trage man auf dem Schenkel *AO* eine beliebige Einheit *O* 1 sechsmal auf, beschreibe aus *O* mit *O* 5 einen Kreis, halbire den Ergänzungswinkel α durch *Ou*, übertrage auf diese von *C* aus $\frac{1}{3}$ *AO* nach 6, beschreibe ferner aus dem Punkte 6 den Trisectionsbogen *DEF*, verbinde den Punkt *C* mit *A* und *B* durch Gerade, welche den Sectionsbogen in *G* und *H* schneiden, und führe durch diese Punkte die *GJ* und *HK* parallel zu *CO*, wodurch

Fig. 125.



$$\text{arc } AJ = JK = BK = \tfrac{1}{3} AJKB$$

und $$\measuredangle\ AOJ = JOK = KOB = \tfrac{1}{3} AOB$$

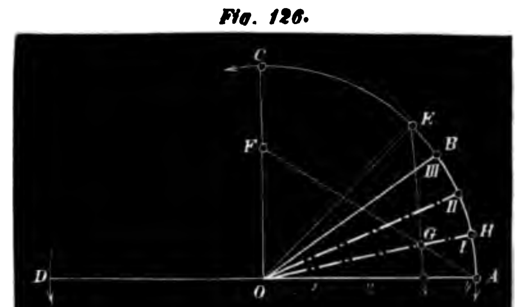
erhalten wird.

Die Verlängerung von dem so erhaltenen Trisectionsbogen darf über die Punkte *D* und *F* hinaus nicht in Anspruch genommen werden, weil in diesem Falle der Fehler sehr rasch wächst.

Diese Methode ist wohl etwas beschränkt, indem nach der Berechnung der Fehler einige Minuten beträgt; dessenungeachtet ist sie bei gewöhnlichen Zeichnungen sehr zu empfehlen, weil sie höchst einfach, dabei sinnreich und auch für die grösseren Winkel eine praktische Genauigkeit gewährt; denn der Punkt *D* (Fig. 124) ist mathematisch richtig, weil der Viertelbogen *BD* sich auf dem Bogen *AD* mathematisch genau dreimal auftragen lässt; es muss also noch der Punkt *E* besonders genau bestimmt werden, da von diesem die Richtigkeit der Theilung abhängt.

XLIV. Trisections-Methode
(mittels einer Geraden).

Fig. 126.



Ein sehr einfaches und zugleich interessantes Verfahren ist folgendes: Man errichte im Scheitelpunkte des gegebenen Winkels *AOB* (Fig. 126) eine Senkrechte *CO*, trage auf dem einen Schenkel eine beliebige Einheit *O* 1 viermal auf, beschreibe dann mit dem Halbmesser gleich vier solchen Einheiten einen Bogen *AB*, durchschneide mit demselben Halbmesser die in *O* errichtete Senkrechte bei *C* und die Verlängerung von *AO* bei *D*; halbire den Quadranten *AC* bei *E* und verbinde diesen Halbirungspunkt mit dem dritten Theilungspunkte der *AO* durch eine Gerade, so ist dann *E* 3 die Trisectionslinie, vermittelst welcher jeder beliebige Winkel von 0—45° mit einer ausserordentlichen Genauigkeit gedrittelt werden kann.

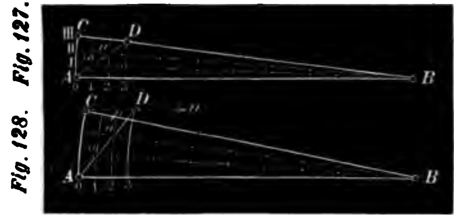
Soll nun z. B. der Winkel *AOB* gedrittelt werden, so fasse man dessen Sehne *AB* in Zirkel, trage sie auf die Normale *CO* von *O* nach *F*, verbinde dann den so erhaltenen Punkt *F* mit *A* durch eine Gerade und führe durch den so erfolgten Durchschnittspunkt *G* ebenfalls eine Gerade, welche die verlangte Theilungslinie sein wird.

Ist der gegebene Winkel > 45°, so wird er halbirt und mit jeder der beiden Hälften so wie zuvor verfahren.

XLV. Trisections-Methode
(mittels der Parallelbögen und einer Transversalen).

Dieses Verfahren ist von dem berühmten Astronomen *Tycho de Brahe*.

Fig. 127. *Fig. 128.*



Es sei *ABC* (Fig. 127) der zu theilende Winkel und *AC* der ihm entsprechende Bogen. Man nehme auf dem Schenkel *AB* eine beliebige Einheit *A* 1 an und trage sie auf *AB* von *A* aus dreimal auf; beschreibe durch jeden so erhal-

tenen Theilpunkt der *AB* aus *B* einen Bogen und ziehe die Transversale *AD*, so sind die 2 auf den 2 mittleren Parallelbögen erhaltenen Durchschnittspunkte *m* und *n* Punkte der 2 Theilungslinien. Zieht man nun aus *B* durch *m* und *n* die 2 Geraden *BI*, *BII*, so folgt arc $AI = I\,II = II\,III = \frac{1}{3}\,AC$

und $\measuredangle\ ABI = IBII = IIBIII = \frac{1}{3} ABC$

näherungsweise aber bei sehr kleinen Winkeln recht anwendbar.

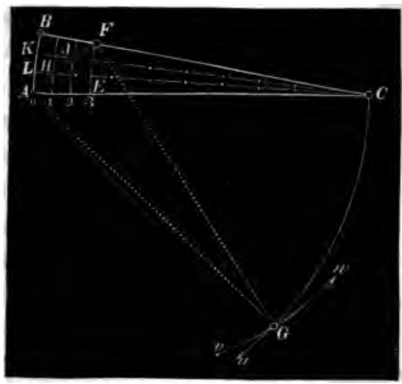
Bei diesem Verfahren werden die Theilpunkte *I* und *II* desto richtiger erhalten, je mehr die auf *AB* angenommene Einheit sich der Sehne des Drittelwinkels nähert. Man findet diese Construction insbesondere in *Mayer's* praktischer Geometrie, Göttingen 1814.

Für grössere Winkel lässt sich dieses auf folgende Art verbessern: Nachdem man in Fig. 128, wie zuvor, die Parallelbögen gezogen hat, führt man aus *C* zu *AB* eine Parallele, verlängert den durch 3 beschriebenen Bogen bis *D*, zieht die Transversale *AD*, welche auf den 2 Parallelbögen die Punkte *m* und *n* etwas genauer bestimmt, wie zuvor. Doch ist die erste Art bei sehr kleinen Winkeln hinreichend praktisch und leicht ausführbar.

XLVI. Trisections-Methode.

Die einfachste, genaueste und anwendbarste Methode der Dreitheilung bei sehr kleinen Winkeln ist unstreitig die hier folgende:

Fig. 129.



Es sei *ACB* (Fig. 129) der zu theilende Winkel und *AB* der ihm entsprechende Bogen. Man trage auf dem einen Schenkel dieses Winkels, hier auf *AC* von *A* aus eine beliebige Einheit (jedoch nahe $\frac{1}{3}$ *AB*) 3mal auf, beschreibe aus dem Scheitelpunkte *C* durch jeden Theilpunkt der *AC* Parallelbögen zu *AB*. Nun fasse man *AC* in Zirkel und beschreibe damit aus *A* den Bogen *Cu* und aus *F* den Bogen *vw*, welcher den letzteren in *G* schneidet. Beschreibt man ferner aus *G* mit $AG = AC$ den Bogen *AF* und führt aus *C* durch die so auf den Parallelbögen erhaltenen Durchschnittspunkte *H* und *J* die Geraden *CK*, *CL*, so theilen diese

hen gegebenen Bogen und Winkel in drei gleiche Theile, so dass der

$$\text{arc}\, AL = LK = KB = \tfrac{1}{3} AB$$

und

$$\measuredangle ACL = LCK = KCB = \tfrac{1}{3} ACB \text{ erfolgt.}$$

Dieses Verfahren ist für kleine Winkel eine sehr genaue Substitution, derart, dass man sich keine bessere wünschen kann.

XLVII. Trisections-Methode

mittels der Trisectionscurve (von *L. P. V. M. Azemar*, französischem Mathematiker).

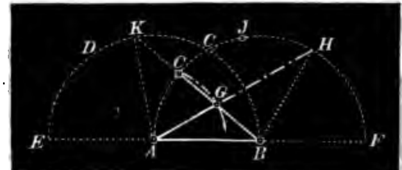
Diese Methode mittels der Trisectionscurve beruhet auf den hier nachfolgenden zwei Sätzen aus der elementaren Geometrie, welche zeigen, wie man das Dreifache eines gegebenen Winkels findet.

Die krumme Linie selbst beruhet auf einer Gleichung, welche *Garnier* aus den Eigenschaften dieser Linie abgeleitet hat, nämlich auf der Gleichung:

$$x^3 - 3r^2x + r^2 \,.\, 2r\left(\frac{P-S}{P+S}\right) = 0,$$

in welcher P und S das grosse und das kleine Segment einer Sphäre und x den Abstand vom Mittelpunkte bedeutet.

Fig. 130.



Es sei ABC (Fig. 130) der gegebene Winkel und AC der ihm entsprechende Bogen. Beschreibt man aus B mit dem Schenkel AB den einen Halbkreis $AJHF$ und aus A mit demselben Halbmesser den zweiten BKE, fasst dann die Sehne AC in Zirkel, beschreibt damit aus A den Bogen CG, welcher den Schenkel BC in G schneidet und führt aus A durch G eine Gerade bis H, so ist $\text{arc}\, ACH = 3 \text{ arc}\, AC$.

Beweis. Es ist das Dreieck ACG gleichschenkelig, weil nach der Construction $AG = AC$ ist, als Halbmesser eines und desselben Kreises; da nun die beiden gleichschenkeligen Dreiecke ABC und ACG den Winkel an der Basis, d. i. den Winkel bei C, gemeinschaftlich haben, so müssen sie natürlicher Weise auch ihre 2 übrigen Winkel einander gleich haben; sie sind daher ähnlich, folglich ist $\measuredangle ABC = \measuredangle CAG$. Da ferner $\measuredangle CAH$ oder CAG ein Peripheriewinkel und CBH ein Centriwinkel ist, welche auf demselben

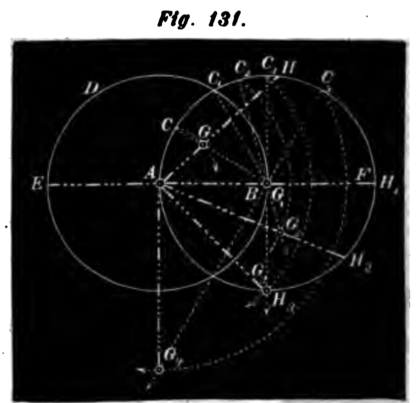
Bogen aufstehen, so ist arc CH = 2 arc AC, folglich muss auch arc ACH das Dreifache des arc AC sein.

Eine weitere Betrachtung dieser Construction zeigt uns ferner, da $AK = AB$ als Halbmesser einander gleich sind, daher $\measuredangle AKB = ABK$ ist, dass $BC = GK$ und $BG = CK$ ist.

Mag nun der Winkel, von dem kleinsten bis 360° genommen, wie immer gross sein, so wird diese Construction und der Beweis immer eine gleiche Geltung haben.

Einige spezielle Stellungen des als drehbar gedachten Schenkels BC um den Punkt B machen diese Construction etwas klarer. Denn denkt man sich den Schenkel BC (Fig. 131) um den Punkt B so weit gedreht, dass der Punkt C nach C' kommt, so muss der Punkt G auf B fallen, und wird aus A durch B eine Gerade bis H' gezogen oder was dasselbe ist, die AB bis F verlängert, so wird der Halbkreis $ACHH'$ das Dreifache des Bogens AC' sein. Es schneidet aber der eine Halbkreis den andern ohnehin so, dass der Bogen AC' die Hälfte von dem Bogen $C'HF$ ist, somit ist der Halbkreis das Dreifache des Bogens AC'. Indem nun der Schenkel BC immer weiter und weiter gedreht wird, rückt auch der Punkt G näher dem Mittelpunkte, mithin schreitet auch die Gerade AH näher gegen den Durchmesser AF, so dass für $\alpha = 60^{0}$ der Punkt C mit dem Mittelpunkte B, und die Gerade AH mit dem Durchmesser AF zusammenfällt, wo dann, wie gesagt wurde, der Halbkreis das Dreifache des Winkels $\alpha = 60^{0}$ wird.

Fig. 131.



Denkt man sich ferner den Schenkel BC so weit gedreht, dass der Winkel $\alpha > 60^{0}$ wird, so kann der drehbare Schenkel BC erst in der Verlängerung, hier bei G_2 geschnitten werden, weil die Sehne, welche als Halbmesser für den schneidenden Bogen angenommen wird, grösser ist als der Schenkel BC.

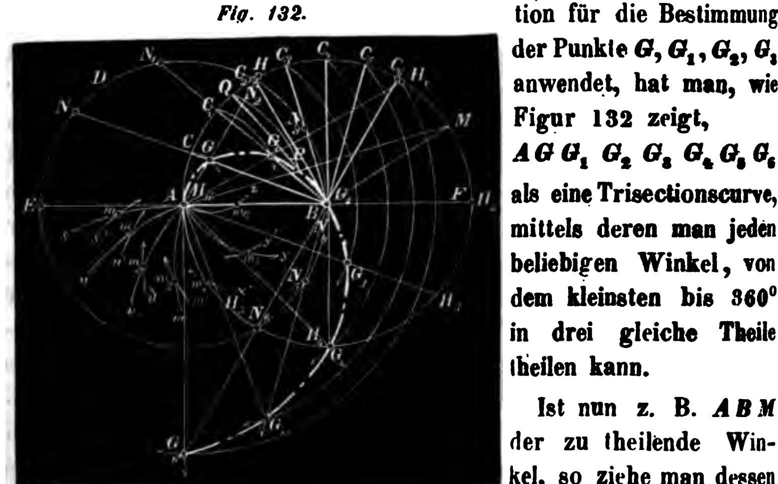
Hat der Winkel α 90° erreicht, so wird der Schenkel BC_3 erst in der Verlängerung bei G_3, also in der Peripherie geschnit-

ten, weil in diesem Falle der Punkt A gleich weit vom Punkte C_3 und G_3 absteht, und es wird der Bogen $A\,C_3\,H\,G_3$ das Dreifache des Bogens $A\,C\,C_3$ sein.

Hat man den Schenkel BC so weit gedreht, dass der Winkel $\alpha = 120^0$ ist, so wird die Verlängerung des Schenkels $B\,C_4$ durch den Punkt G_4 gehen, und die Verlängerung der Sehne, welche hier $= 0$ ist, wird die in A gezogene Tangente AG_4 sein. Das Dreifache des Bogens von 120^0, d. i. von AC_4 wird die ganze Peripherie des Kreises B sein.

Indem man nun die eine oder die andere Art der Construction für die Bestimmung der Punkte G, G_1, G_2, G_3 anwendet, hat man, wie Figur 132 zeigt, $A\,G\,G_1\,G_2\,G_3\,G_4\,G_5\,G_6$ als eine Trisectionscurve, mittels deren man jeden beliebigen Winkel, von dem kleinsten bis 360^0 in drei gleiche Theile theilen kann.

Fig. 132.



Ist nun z. B. ABM der zu theilende Winkel, so ziehe man dessen Sehne AM, welche die Curve in P schneidet, und beschreibe aus A mit der Strecke AP den Bogen PQ, wodurch man

$$\text{arc } AQ = \tfrac{1}{3} \text{arc } AQM$$

erhält und wodurch auch, wenn Q mit B verbunden wird,

$$ABQ = \tfrac{1}{3} ABM \text{ erfolgt.}$$

Gleiches gilt auch von jedem andern Winkel bis 360, sobald die Trisectionscurve richtig construirt ist.

Aus dieser Figur kann man zugleich entnehmen, wie man die Punkte der Curve nach der ersten und nach der zweiten Art findet. Nach der ersten Art findet man G_1, G_2, G_3, ... indem man in den beweglich gedachten Halbmesser mit der der jedesmaligen Stellung entsprechenden Sehne Einschnitte macht; und nach der zweiten Art findet man diese Punkte, indem man den beweglich gedachten Halbmesser bis zu der Peripherie des Kreises um A verlängert und

von der Peripherie aus auf jeder so entstandenen Sehne *BN*, *BN*$_1$, *BN*$_2$ .... den Halbmesser *AB* aufträgt.

Azemar gibt wohl auch ein Mittel an, diese krumme Linie continuirlich zu beschreiben, allein dies hat in der Praxis nur einen geringen Werth, wesshalb wir es hier nicht aufnehmen.

Viel interessanter und werthvoller ist die Art, wie man diese krumme Linie mittels Zirkel aus Kreisbögen zusammensetzt, welches merkwürdiger Weise auch wirklich Statt findet. Dies geschieht auf folgende Art: Beschreibt man aus G_6 mit AG_6 den Bogen As und durchschneidet ihn mit demselben Halbmesser aus G_5 in m, so ist m der Mittelpunkt und die Entfernung mG_6 der Radius für den Substitutionsbogen $G_6 G_5$. Beschreibt man ferner aus G_5 und G_4 mit AG_5 abermals zwei sich bei m_1 schneidende Bögen, so ist m_1 der Mittelpunkt für den nächstfolgenden Substitutionsbogen $G_5 G_4$, welcher mit demselben Halbmesser beschrieben wird, mit welchem der Mittelpunkt gefunden wurde.

Nimmt man nun sofort den grösseren Abstand von *A* eines Bogenstückes zum Halbmesser und bestimmt auf obige Art für jedes Stück den Mittelpunkt, so lässt sich diese krumme Linie sehr leicht und praktisch mit dem Zirkel beschreiben, welches desto genauer sein wird, aus je mehr Bogenstücken sie zusammengesetzt ist, also je mehr Punkte man für diese bestimmt hat.

Diese krumme Linie hat ein französischer Mathematiker ***Azemar*** erfunden und ***Garnier***, Professor der Mathematik an der polytechnischen Schule in Paris, hat ihre weiteren Eigenschaften untersucht, welches in dem Werke: Trisection de l'angle par ***L. P. V. M. Azemar***, suivie de recherches analytiques sur le même sujet, par ***J. G. Garnier***, Professeur à l'Ecole polytechnique, Paris 1809, zu finden ist.

Da die genauere Beschreibung, so wie die analytische Abhandlung dieses Werkes zu weitläufig ist, so wurde hier nur die Construction und die Erklärung in Kürze aufgenommen.

XLVII. Trisections - Methode
(mittels der Hyperbel).

Zum Schlusse der Trisection wollen wir noch, so wie in der Einleitung, eine bekannte Methode und zwar die mittels Hyperbel angeben.

Schulz von **Strasznicki** sagt in seiner Geometrie für Praktiker über die Auflösung der geometrischen Aufgaben Folgendes:

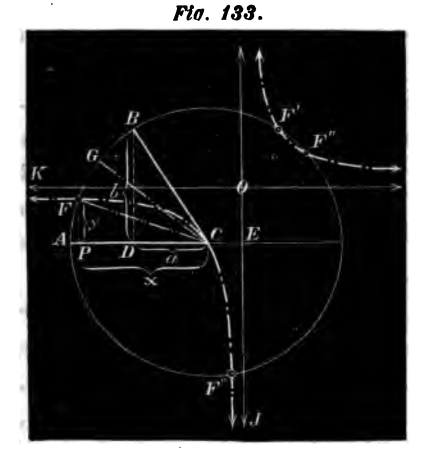
Die alten griechischen Geometer nannten die Auflösungen der geometrischen Aufgaben mittels krummen Linien mechanische Auflösungen, hingegen die Auflösungen bloss mittels Zirkel und Linial geometrische Auflösungen.

Es ist leicht begreiflich, dass nicht alle Aufgaben der Geometrie bloss mittels Zirkel und Lineal gelöst werden können, d. h. eine geometrische Auflösung zulassen. Eine solche Aufgabe ist die: Einen gegebenen Winkel in drei gleiche Theile zu theilen.

Wie solche Aufgabe mittels der Hyperbel aufgelöst wird, soll hier gezeigt werden.

Es sei der Winkel $ACB = \alpha$ (Fig. 133) gegeben. Denkt man sich aus C mit AC einen Kreis beschrieben, so handelt es sich darum, den Punkt F im Kreisbogen AB so zu bestimmen, dass arc $AF = \frac{1}{3} AB$ ist.

Fig. 133.



Zieht man nun $BD \perp AC$, setzt $CD = a$, $BD = b$, nimmt den Mittelpunkt C als Anfangspunkt der Coordinaten an, betrachtet AC als Achse der x, setzt $CP = x$, $FP = y$, und den Halbmesser $BC = r$, so ist

$$1)\quad a = r \cos \alpha$$

$$2)\quad b = r \sin \alpha,$$

$$3)\quad x = r \cos \frac{\alpha}{3},$$

$$4)\quad y = r \sin \frac{\alpha}{3}.$$

Schafft man aus diesen vier Gleichungen r und α weg, so hat man dann nur die Beziehungen zwischen a, b, x und y, d. h. man bekommt die Bestimmung der Lage des Punktes F rücksichtlich des Punktes B. Zu diesem Behufe haben wir:

$$x = r \cos \frac{\alpha}{3} = r \cos\left(\alpha - \frac{2\alpha}{3}\right) = r \cos \alpha \cos \frac{2\alpha}{3} + r \sin \alpha \sin \frac{2\alpha}{3},$$

$$y = r\sin\frac{\alpha}{3} = r\sin\left(\alpha - \frac{2\alpha}{3}\right) = r\sin\alpha\cos\frac{2\alpha}{3} - r\cos\alpha\sin\frac{2\alpha}{3}.$$

Multipliciren wir die erste dieser Gleichungen mit r sin α, die zweite mit r cos α, und subtrahiren sie von einander, so folgt:

$$xr \text{ sie } \alpha - yr\cos\alpha = r^2 \sin\frac{2\alpha}{3},$$

$$bx - ay = 2r^2 . \sin\frac{\alpha}{3} . \cos\frac{\alpha}{3},$$

und $$bx - ay = 2xy,$$

das ist die Gleichung einer krummen Linie, die unsern Kreis in F so schneidet, dass $AF = \frac{1}{3} AB$ ist.

Nun wollen wir untersuchen, was das für eine krumme Linie ist.

Nehmen wir O als Anfangspunkt an, wobei $CE = \frac{a}{2}$ und $OE = \frac{b}{2}$ ist, so hat man, wenn x' und y' die neuen Coordinaten rücksichtlich des Anfangspunktes O bedeuten:

$$x = x' - \frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2} + y',$$

daher die neue Gleichung unsrer Krummen

$$b\left(x' - \frac{a}{2}\right) - a\left(\frac{b}{2} + y'\right) = 2\left(x' - \frac{a}{2}\right)\left(\frac{b}{2} + y'\right)$$

oder $$xy' = \frac{2b}{4}.$$

Unsere Krumme ist also eine Hyperbel, wo die Coordinatenachsen OJ und OK ihre Assymptoten sind.

Die Coordinaten der Punkte der Krummen, deren Gleichung rücksichtlich des Anfangspunktes C $bx - ay = 2xy$ ist, und die zugleich der Gleichung des Kreises rücksichtlich desselben Anfangspunktes, nämlich $r^2 + y^2 = a^2 + b^2$, Genüge leisten, geben die Durchschnittspunkte beider Krummen.

Da nun $b = r\sin\alpha$, $a = r\cos\alpha$ ist, so gibt die eine Gleichung

$$y = \frac{rx\sin\alpha}{2x + r\cos\alpha} \quad \ldots . (1),$$

welches in die zweite Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ substituirt, gibt:

$$x^2 + \frac{r^2x^2\sin\alpha}{(2x + r\cos\alpha)^2} = r^2;$$

ordnet man nun diese Gleichung, so folgt:

$$4x^4 + 4r\cos\alpha\, x^3 + r^2x^2 - r^2(2x + r\cos\alpha)^2 = 0 \;\ldots\; (2)$$

oder $4x^3(x + r\cos\alpha) - r^2(x + r\cos\alpha)(3x + r\cos\alpha) = 0$,

oder $(4x^3 - 3r^2x - r^3\cos\alpha)(x + r\cos\alpha) = 0$;

daher, wie man sieht, $x + r\cos\alpha = 0$, d. h. $x = -r\cos\alpha$ eine Auflösung unserer Gleichung (2) ist; und substituirt man

$$x = -r\cos\alpha \text{ in } (1),$$

so folgt $y = r\sin\alpha$.

Da also hier $x = r\cos(180^0 - \alpha)$, $y = r\sin(180^0 - \alpha)$ ist, so schneidet unsere Hyperbel den Kreis in einem Punkte, dessen Halbmesser mit AC einen Winkel von $180^0 - \varphi$ bildet.

Um die übrigen Auflösungen zu finden, hat man:

$$4x^3 - 3r^2x - r^2\cos\alpha = 0 \;\ldots\ldots\; (3)$$

Da aber, wie wir bereits wissen,

$$x = r\cos\frac{\alpha}{3} \text{ und } y = r\sin\frac{\alpha}{3}$$

eine Auflösung von (2), also auch von (3) ist, so muss $x = r\cos\frac{\alpha}{3}$ die Gleichung (3) wirklich auf Null reduciren, was auch in der That der Fall ist; denn es ist:

$$4r^3\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3r^3\cos\frac{\alpha}{3} - r^3\cos\alpha = 0 \;\ldots\ldots\; (4),$$

weil, wie man sich leicht überzeugt,

$$\cos\alpha = 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3} \text{ ist,}$$

[da nämlich: $\cos 3x = \cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x$

$= (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - 2\sin^2 x\cos x$

$= \cos^3 x - 3\sin^2 x\cos x$

$= \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x)\cos x$

$= 4\cos^3 x - 3\cos x$ ist].

Dividirt man nun den Ausdruck in (3) durch $x - r\cos\frac{\alpha}{3}$, so erhält man:

$$(4\alpha^3 - 3r^2x - r^3\cos\alpha) : \left(x - r\cos\frac{\alpha}{3}\right)$$

$$= 4x^2 + 4rx\cos\frac{\alpha}{3} + \left(4\cos^2\frac{\alpha}{3} - 3\right)r^2,$$

daher

$$(4\alpha^3 - 3r^2x - r^3\cos\alpha)$$

$$= \left[4x^2 + 4rx\cos\frac{\alpha}{3} + \left(4\cos^2\frac{\alpha}{3} - 3\right)r^2\right]\left(x - r\cos\frac{\alpha}{3}\right),$$

folglich geschieht der Gleichung (3), also auch der Gleichung (2) Genüge, wenn man die Werthe für x sucht, welche

$$4x^2 + 4rx\cos\frac{\alpha}{3} + \left(4\cos^2\frac{\alpha}{3} - 3\right)r^2 = 0 \text{ machen.}$$

Diese Gleichung aber gibt uns:

$$x = -\frac{r}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{3} \pm \sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{3}\right)$$

oder

$$x = r\left(-\tfrac{1}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{3} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{3}\right);$$

da aber

$$-\tfrac{1}{2} = \cos 120^0 = \cos 240^0,\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 120^0,\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 240^0$$

ist, so hat man

$$x = r\left(\cos 120^0 \cos\frac{\alpha}{3} - \sin 120^0 \sin\frac{\alpha}{3}\right) = r\cos\left(\frac{\alpha}{3} + 120^0\right),$$

$$x = r\left(\cos 240^0 \cos\frac{\alpha}{3} - \sin 240^0 \sin\frac{\alpha}{3}\right) = r\cos\left(\frac{\alpha}{3} + 240^0\right).$$

Man hat daher ausser $x = -r\cos\alpha$ folgende drei Auflösungen:

$$x = r\cos\frac{\alpha}{3},\ x = r\cos\left(\frac{\alpha + 360}{3}\right),\ x = r\cos\left(\frac{\alpha + 2.360}{3}\right),$$

denen vermöge $x^2 + y^2 = r^2$

$$y = r\sin\frac{\alpha}{2},\ y = r\sin\left(\frac{\alpha + 360}{3}\right),\ y = r\sin\left(\frac{\alpha + 2.360}{3}\right)$$

entsprechen.

Es gibt also der Durchschnitt der untersuchten Hyperbel nicht nur den dritten Theil des gegebenen Winkels α, sondern auch den dritten Theil von

$$\alpha + 360^0,\ \alpha + 2.360,$$

was auch ganz in der Ordnung ist, denn wenn man einen Winkel α betrachtet, so kann dieser Winkel entstanden sein, wenn sich der eine Schenkel um einen Bogen α, oder auch um den Bogen

$$\alpha + 360^0,\ \alpha + 2.360^0,\ \alpha + 3.360^0 \text{ u. s. w.}$$

gedreht hat.

Alle diese Winkel unterscheiden sich gar nicht von einander, aber ihre dritten Theile geben drei verschiedene Winkel, nämlich:

$$\frac{\alpha}{3},\ \frac{\alpha}{3} + 120^0,\ \frac{\alpha}{3} + 240^0, \ldots (5)$$

Durch die Division mit 3 bei den übrigen Winkeln, als:

$$\alpha + 3.360,\ \alpha + 4.360^0,\ \alpha + 5.360^0 \ldots.$$

kommt man immer wieder auf die drei Winkel in (5) zurück, denn:

$$\frac{\alpha + 3 \cdot 360}{3} = \frac{\alpha}{3} + 360^0 = \frac{\alpha}{3},$$

$$\frac{\alpha + 4 \cdot 360}{3} = \frac{\alpha}{3} + 360^0 + 120^0 = \frac{\alpha}{3} + 120^0,$$

$$\frac{\alpha + 5 \cdot 60^0}{3} = \frac{\alpha}{3} + 360^0 + 420^0 = \frac{\alpha}{3} + 240^0.$$

Polysection.

Was die Polysection der Winkel betrifft, d. i. das Verfahren, nach welchem man einen beliebigen Winkel in eine beliebige Anzahl gleicher Theile theilen kann, so waren bis jetzt im Allgemeinen 3 Verfahrungsarten bekannt. Die eine von *Tycho de Brahe*, mittels der Parallelkreise und der sie transversal schneidenden Geraden (annähernd und nur bei sehr kleinen Winkeln anwendbar); dann das Verfahren mittels der krummen Linie, die Dinostrat'sche Quadratrix (Quadratrix Dinostratis) genannt, und noch ein anderes Verfahren, ebenfalls mittels der krummen Linie, die Tschirnhaus'sche Quadratrix (Quadratrix Tchirnhusiana) genannt.

Die Dinostrat'sche Quadratrix, als die älteste, hat, wie man behauptet, Anlass gegeben, die Tschirnhaus'sche zu entdecken; letztere hat insoferne den Vorzug vor der ersteren, als man bei dieser den zweiten Endpunkt bestimmen kann, während bei der ersteren nach der Ansicht mancher Geometer, der zweite Endpunkt sich niemals genau bestimmen lässt.

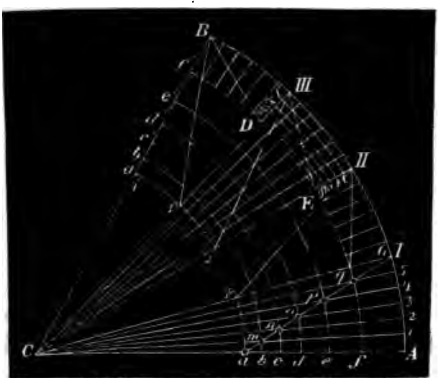
Unsere Behauptung und Beweis hinsichtlich dieses Punktes folgt bei der Construction der dieser Quadratrix entsprechenden Curve.

Da die Tschirnhaus'sche Quadratrix, wie hier später gezeigt wird, nichts anders als eine Schraubenlinie ist und diese schon vor Tschirnhausen bekannt war, so hat sie wahrscheinlich desshalb diesen Namen erhalten, weil *Tschirnhausen* solche zur Theilung des Quadranten angewendet und sie näher untersucht hat.

I. Polysections-Methode,

anwendbar bei der Theilung eines sehr kleinen Bogens in eine beliebige Anzahl gleicher Theile (von *Tycho de Brahe*)

Fig. 134.



Es sei AB (Fig. 134) irgend ein mit dem Halbmesser AC aus C beschriebener Kreisbogen, der in seine einzelne Grade in den Punkten I, II, III getheilt ist. Man soll nun jeden Grad in n gleiche Theile theilen.

Man ziehe mit beliebigem Halbmesser aus C den concentrischen Bogen aa', so wird auch dieser durch die Geraden CI, CII, $CIII$ . . . in 1^0 2^0, 3^0 in seine einzelne Grade getheilt. Man denke sich nun das Stück Aa des Halbmessers AC in den Punkten b, c, d . . . in n solche Theile getheilt, dass, wenn durch sie die concentrischen Bogen bb', cc', dd' . . und die Transversalen aI, $1^0 II$, $2^0 III$ . . . . gezogen werden, die durch die Durchschnittspunkte m, n, o, p, q . . . . gezogenen Radien $C1$, $C2$, $C3$ . . . . den Bogen AI in n gleiche Theile theilen. Es kommt nun bloss darauf an, die Grösse der Radien Cb, Cc, Cd . . . . zu bestimmen, welches folgende Betrachtung lehrt. Wegen der unbedeutenden Länge der Parallelbögen bm, cn, do . . . . können diese als gerade Linien angesehen werden, ohne in der Ausübung einen merklichen Fehler zu veranlassen. Dann ist aber in den Dreiecken Cbm und $CA1$, so wie in den Dreiecken abm und aAI^0

$$CA : A1 = Cb : bm;$$

ferner

$$AI^0 : Aa = bm : ab.$$

Setzt man nun beide Proportionen zusammen, so erhält man

$$AI^0 . CA : Aa . A1 = Cb : ab.$$

Ist nun der Halbmesser $AC = r$, das Stück $Aa = a$, der unbekannte Radius $Cb = x$, also

$$ab = Cb - Ca = x - (r - a),$$

und die Länge des Bogens $AI^0 = b$, folglich der Bedingung der Aufgabe gemäss

$$A1^0 = \frac{b}{n};$$

so hat man durch Substitution:

$$b.r : a.\frac{b}{n} = x : x - (r - a);$$

oder $$r : \frac{a}{n} = x : x - r + a;$$

hieraus folgt $$\frac{a}{n} . x = rx - r\,(r - a),$$

oder $$\left(r - \frac{a}{n}\right) x = r\,(r - a) = \frac{(nr - a)\,x}{n},$$

demnach $$x = \frac{nr\,(r - a)}{nr - a}.$$

Man würde also in besonderen Fällen diesen Werth für x berechnen, die gefundene Länge von einem Massstabe abnehmen, und mit dieser Zirkelöffnung aus C den Bogen $b\,b'$ ziehen; so schneidet der durch n gezogene Halbmesser $C1$ einen Bogen

$$A1 = \frac{a\,r}{n} \text{ ab.}$$

Aus der Vergleichung der Dreiecke $CA2$ und Ccn geht die Proportion hervor: $Cc : cn = CA : A2$,

oder $$y : cn = r : \frac{2b}{n}, \text{ also } cn = \frac{2b}{nr} . y;$$

und in den Dreiecken acn und aAI^0 ist:

$$ac : cn = Aa : A1^0,$$

oder $$y - (r - a) : cn = a : b,$$

also $$cn = \frac{2b}{nr} . y = \frac{by - b\,(r - a)}{a},$$

woraus $$y = \frac{nr^2 - anr}{nr - 2a} = \frac{nr\,(r - a)}{nr - 2a}$$

gefunden wird.

Auf dieselbe Art findet man den dritten Halbmesser

$$Cd = z = \frac{nr\,(r - a)}{nr - 3a}; \text{ u. s. w.}$$

Wenn nun AI^0 einen Grad bedeutet, der z. B. in sechs gleiche Theile oder von 10 zu 10 Minuten zu theilen wäre, so ist $n = 6$, und wenn z. B. $r = 100$ und $Aa = a = 10$ wäre, so findet man:

$$x = \frac{6 . 100\,(100 - 10)}{6 . 100 - 10} = \frac{600 . 90}{590} = 91{\cdot}525 \ldots.,$$

$$y = \frac{600 + 90}{580} = 93{\cdot}103 \ldots.,$$

und $$z = \frac{600 . 90}{600 - 30} = 94{\cdot}7368 \ldots. \text{ beinahe.}$$

Ebenso berechnet man auch die übrigen Halbmesser.

Dieses Verfahren findet man schon in *Mayers* praktischer Geometrie und in *Salomons* Geometrie, so wie es hier angeführt wurde.

Man kann dieses Verfahren leicht den Transversalmassstab für einen Kreisbogen nennen, weil diese Constructionsweise eine Aehnlichkeit mit einem Transversalmassstabe hat.

Aus der näheren Betrachtung der Figur geht hervor, dass, je länger die Transversale ist, desto weiter werden auch die Parallelbögen von einander abstehen und desto grösser wird die Differenz der Halbmesser sein, mit denen sie beschrieben werden, und umgekehrt.

Eine vollkommene Gleichheit der Entfernungen der Parallelbögen ist nach dieser Construction unmöglich, weil für diesen Fall nicht eine transversale Gerade, sondern ein eigener Transversalbogen erforderlich ist, wie sich dies aus der hier später folgenden mathematisch richtigen Quadratrix des Verfassers ergibt.

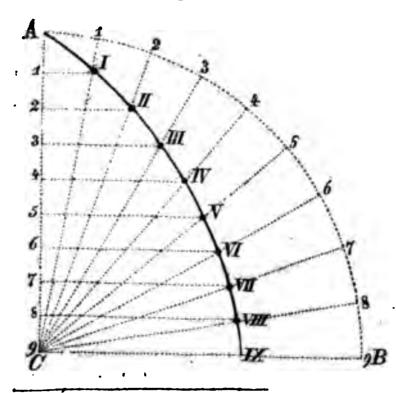
Wenn gleich dieses Verfahren sich in geometrischen Büchern vorfindet, so können wir es doch nicht als ein praktisches ansehen, weil man erst durch viele umständliche Rechnungen zu dem eigentlichen Ziele gelangt und weil es auch wirklich, streng genommen, keine geometrische Construction ist.

Aus der hier später folgenden Quadratrix vom Verfasser ist für diesen Fall, wie wir dies schon bei der Trisection gesehen haben und wie es hier gezeigt wird, ein anderes, viel richtigeres und ganz praktisches Verfahren abgeleitet worden, welches das zuvor angeführte in Hintergrund zurückdrängt.

II. Polysections-Methode

(mittels der *Dinostrat*'schen Quadratrix).

Fig. 135.



Man zeichne einen Quadranten *ACB* (Fig. 135), theile denselben in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, hier in 9 *), theile ferner den ihm entsprechenden Halbmesser *AC* ebenfalls in so viele gleiche Theile, als in wie viele der Viertelbogen *AB* getheilt wurde, verbinde jeden Theilungspunkt des Bogens mit dem Mittelpunkte *C* und führe durch jeden Theilungspunkt des einen

*) Die Theilung des Quadranten zu diesem Zwecke geschieht am schnell-

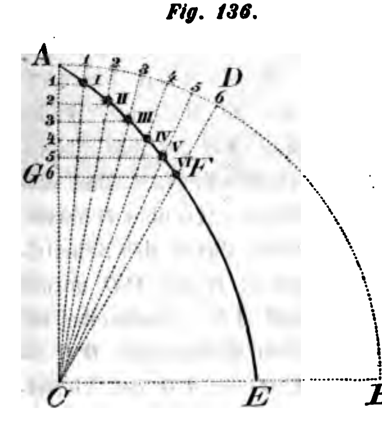
Halbmessers *AC* zu dem andern Halbmesser Parallele,
also hier *1 I* ‖ *2 II* ‖ *3 III* ..... ‖ *BC*
bis die der Reihe nach folgenden Halbmesser geschnitten werden, so gibt der Halbmesser *C* 1 mit der Parallelen 1 *I* den Punkt *I*; der Halbmesser *C* 2 mit der Parallelen 2 *II* den Punkt *II* u. s. w., so dass also hierdurch, wenn die so erfolgten Durchschnittspunkte continuirlich mit einander verbunden werden, eine krumme Linie, hier *A I II III* ..... *VIII, IX* entsteht, welche man Quadratrix, und zwar die *Dinostrat*'sche (Quadratrix Dinostratis) nennt.

Diese Quadratrix hat die Eigenschaft, dass man mittels derselben nicht nur den Quadranten, sondern auch jeden beliebigen Theil desselben radial in eine beliebige Anzahl gleicher Theile theilen kann.

Wollte man mittels dieser Quadratrix den Quadranten in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, z. B. in 13 theilen, so braucht man nur den Halbmesser *AC* in die verlangte Anzahl gleicher Theile zu theilen, aus den Theilungspunkten zu dem zweiten Halbmesser bis zur Quadratrix Parallele zu führen und durch die so in der Quadratrix erfolgten Punkte aus dem Mittelpunkte *C* die Halbmesser zu ziehen, wodurch der Viertelbogen, somit auch der ganze Quadrant in die verlangten, hier in 13 gleiche Theile, getheilt wird.

Hat man also die Theilung des Bogens und des Halbmessers genau gemacht und auf die angezeigte Art sorgfältig die Quadratrix gezeichnet, so wird auch die verlangte Theilung genau erfolgen

Fig. 136.



Der Zweck dieser Quadratrix ist ferner der, auch jeden beliebigen Winkel, der unter 90° ist, in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Es sei also der Winkel *ACD* (Fig. 136) gegeben, welcher z. B in sechs gleiche Theile getheilt werden soll. Man construire zuerst, nach der obigen Art die Qua-

sten und mathematisch richtig mittels der Halbirung der Winkel, und zwar am bequemsten nach einer der vom Verfasser bei der Bisection angeführten Methoden.

dratrix *AFE* (welche hier bei *A* anfängt und den Halbmeser *CD* in *F* schneidet), ziehe aus dem Durchschnittspunkte *F* zu *BC* die Parallele *FG*, theile das so auf *AC* erhaltene Stück *AG* in so viele gleiche Theile, als in wie viele der Winkel und dessen Bogen getheilt werden soll und ziehe durch jeden Theilpunkt der *AG* zu *BC* oder zu *FG* Parallele, bis die Quadratrix geschnitten ist.

Führt man zuletzt durch die so in der Quadratrix erfolgten Punkte *I, II, III* ..... aus dem Mittelpunkte *C* die Halbmesser *C*1, *C*2, *C*3 ....., so sind diese die verlangten Theilungslinien des gegebenen Winkels und Bogens,

so dass arc $A1 = 1,2 = 2,3 = \ldots\ldots = \frac{1}{8} AD$,

und $\measuredangle\, AC1 = 1C2 = 2C3 = \ldots\ldots, = \frac{1}{8} ACD$ wird.

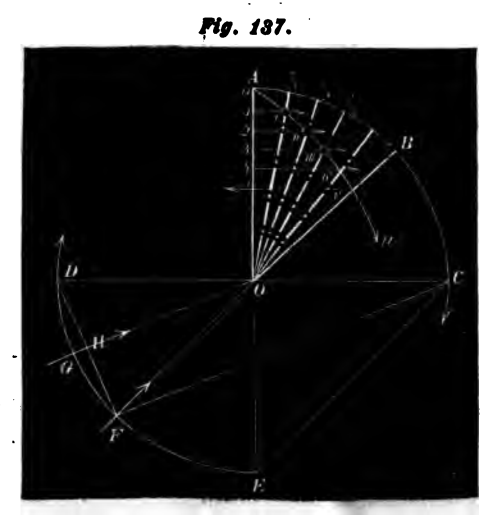
Dies erfolgt mathematisch richtig, sobald die Punkte *I, II, III* ...,... genau bestimmt wurden.

Substitution für diese krumme Linie.

Da die Construction der Quadratrix von *Dinostrat* beim praktischen Zeichnen zeitraubend ist, und die Eintheilung des Winkels vermittelst derselben nur etwa bis 60° genau ausgeführt werden kann, so ist es wohl besser in dieser Hinsicht, eine Substitution durch einen Kreisbogen zu haben. Dieser lässt sich jedoch nur bis 45° genau substituiren, welches doppelt genommen, einen zusammengesetzten Kreisbogen für die Vieltheilung des ganzen Quadranten gibt.

Substitutions-Methode für den halben Quadranten.

Fig. 137.



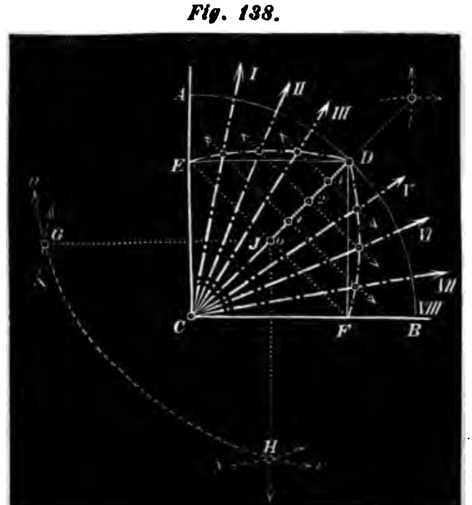
Es sei *AOB* (Fig. 137) der zu theilende Winkel und *AB* der ihm entsprechende Bogen. Man verlängere *AO* über *O* hinaus, ziehe durch den Scheitelpunkt *O* die *CD* normal auf *AO*, beschreibe mit dem Halbmesser *DO* = *CO* = *AO* den Viertelbogen *DE*, halbire ihn in *F* und die Hälfte *DF* ebenso in *G*; ziehe *DF* und *OG* und beschreibe aus

H mit dem Halbmesser gleich der Entfernung *A H* den Bogen *A u*, so ist dieser ein Theil der Quadratrix für jeden Winkel vom kleinsten bis 45° und auch etwa bis 50°. Hat man nun den Bogen *Au* beschrieben, so verfahre man bei der Theilung des Winkels, wie zuvor gesagt wurde. Die gänzliche Eintheilung des Winkels mittels dieses Bogens ist nicht genau; allein es ist auch nicht nothwendig, die ganze Eintheilung so zu machen, sobald der erste Theil, d. i., der nahe an *A* liegende genau erhalten wird; denn die übrigen Theile werden mittels des Auftragens des gefundenen Theiles, wenn man ihn genau abnimmt, richtig erhalten.

Substitutions-Methode für den ganzen Quadranten.

Dies geschieht auf folgende Art:

Fig. 138.



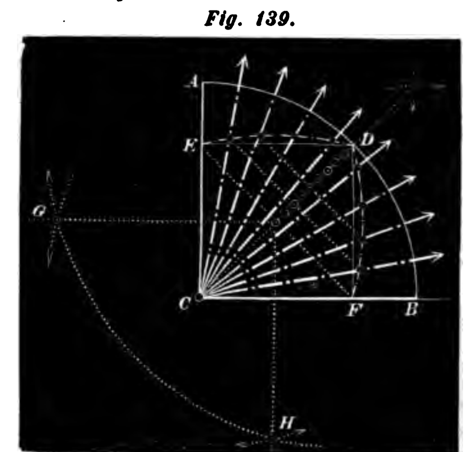
Man zeichne den Winkel *A C B* = *R* (Fig. 138), halbire dessen Bogen *A B* in *D* und ziehe aus *D* die *D E* ∥ *B C*, so wie *D F* ∥ *A C*; nun fasse man die Neunziger - Sehne *A B* in Zirkel, beschreibe damit aus *D* den Bogen *u v*, und durchschneide ihn mit demselben Halbmesser aus *F* und *E* bei *G* und *H*. Beschreibt man ferner aus *G* den Bogen *D F* und aus *H* den Bogen *D E*, so sind diese die Substitutionsbögen für die doppelte von *D* ausgehende Quadratrix.

Will man nun vermittelst der Bögen *D E* und *D F* den rechten Winkel *A C B* z. B. in 8 gleiche Theile theilen, so verbinde man *E* mit *F* durch eine Gerade, theile das so erhaltene Stück *DJ* in eine um die Hälfte kleinere Anzahl gleicher Theile, als in wie viele der Bogen *A B* getheilt werden soll, also hier in vier, lege dann durch jeden Theilungspunkt zu *EF* eine Parallele, bis die Bögen *D E* und *D F* geschnitten werden und führe aus dem Scheitelpunkte *C* durch jeden Punkt der Substitutionsbögen Gerade, bis

der Bogen *A B* geschnitten ist. Hierdurch ist also ausser dem Bogen *A B* auch dessen entsprechender Winkel *A C B* in 8 gleiche Theile getheilt.

Ist die Anzahl Theile, in welche der rechte Winkel getheilt werden soll, ungerade, so wird das Stück *D J* in eben so viele gleiche Theile getheilt, als in wie viele der Bogen *A B*, so wie der ihm entsprechende Winkel zu theilen ist. — Soll z. B. der Winkel *A C B* (Fig. 139) in 9 gleiche Theile getheilt werden, so theile man das Stück *D J* ebenfalls in 9 gleiche Theile, führe aber die Parallelen zu *E F* durch jeden zweiten Theilungspunkt, hier durch 2, 4, 6, 8, und verfahre im Uebrigen wie zuvor.

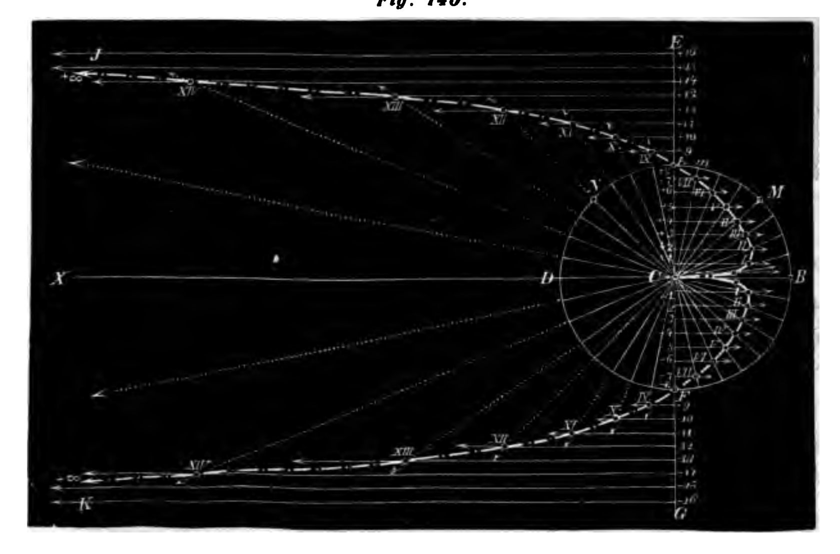
Fig. 139.



Mittels der von *Dinostrat* angegebenen Quadratrix kann man, wie die Construction zeigt, von *A* angefangen die Winkel bis etwa 60° genau theilen; eine weitere Theilung ist unzulässig.

Es soll nun hier gezeigt werden, wie man die Winkel, welche über 60°, also bis 90° reichen, dennoch genau theilen kann. Um dies einzusehen, construiren wir die Quadratrix (Fig. 140) wie

Fig. 140.



zuvor, verlängern dann den Halbmesser AC über A hinaus und tragen den einen Theil des getheilten Halbmesser, hier den 8. Theil auf der gemachten Verlängerung von AC, so oftmal auf, als in wie viele Theile der Halbmesser AC getheilt wurde. Ergänzt man ferner den Viertelkreis AB zu einem Halbkreise, theilt den zweiten Viertelkreis so wie den ersten ein und führt durch die Theilpunkte der Verlängerung zu BD Parallele, so erhält man die Fortsetzung oder Verallgemeinerung der *Dinostrat*'schen Quadratrix, wie dies die Figur zeigt.

Es erhält also diese krumme Linie, wenn auch die andere Hälfte, d. i. die negative hinzugezeichnet wird, wie die Figur 140 zeigt, eine eigenthümliche Form, und die durch den Endpunkt E, oder durch den 16. Theilpunkt der CE zu BD geführte Parallele ist eine Asymptote dieser Curve; denn diese Parallele sollte den letzten Radius, d. i. die Verlängerung der CD schneiden, da sie aber zu einander parallel sind, so kann der Durchschnittspunkt erst in unendlicher Entfernung oder was genauer ist, gar nie erfolgen.

Was den 2. Punkt dieser Curve in der BC, d. i. in der Axe Bx, betrifft, so wird dieser nie mitten auf der BC sein, sondern die krumme Linie muss durch den Mittelpunkt C durchgehen, welches man dann besser einsieht, wenn man statt zu BC Parallele zu ziehen, aus irgend einem Punkte der Verlängerung der AC die Halbmesser des Grundkreises schneidet. Allein schon diese Construction im grösserm Massstabe ausgeführt, zeigt so ziemlich genau, dass die krumme Linie sich gegen den Mittelpunkt wenden muss und dass daher der Mittelpunkt des Grundkreises ein Wendepunkt dieser Curve ist.

Wie man aus der Figur sieht, kann man mittels dieser Curve, wenn beide Theile gezeichnet sind, den ganzen Kreis theilen; wobei jedoch nur die an A und F, also beiderseits dieser Punkte vorkommenden Punkte deutlich ausfallen, die andern hingegen werden desto undeutlicher, je mehr sie sich beiderseits der Axe Bx nähern. Daraus folgt also, dass man mittels dieser Linie die Winkel von A oder F angefangen, beiderseits nur bis 45°, daher z. B. den rechten Winkel MCN und auch jeden inzwischen liegenden Winkel genau theilen kann. Von A oder F gegen B zu ist dies bis 90° nicht möglich.

Die Asymptoten dieser Curve, d. i. EJ und GK erhält man, indem man die Verlängerung des vertikalen Durchmessers AF beiderseits = dem Halbmesser des Grundkreises, also $AE = FG = AC$

macht, dann in E so wie in G die EJ und $GK \perp EG$ führt. Ist nun bei dieser Curve $AB : Am = AC : A7$, und setzt man

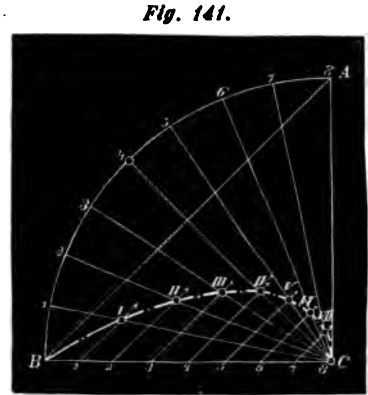
$$AB = a,\ AC = b,\ Am = x \text{ und } A7 = y,$$

so hat man $a : x = b : y$, woraus $ay = bx$ folgt.

III. Polysections-Methode.

Betrachtet man die vorhergehende Methode genau und insbesondere das dabei vorkommende System von Parallelen, welche von den Theilungspunkten des einen Halbmessers des Quadranten zum zweiten Halbmesser desselben parallel gezogen werden, so ergibt sich das hier nachfolgende Verfahren. Denn kann man die Parallelen lothrecht auf den einen Halbmesser ziehen, so entsteht die Frage, ob man sie nicht auch unter einem gewissen Winkel gegen den einen oder den andern Halbmesser ziehen kann. Die Construction mit der Analysis verbunden, gibt uns zur Antwort ja.

Fig. 141.



Es sei nun ACB (Fig. 141) ein Quadrant. Man theile in diesem, wie zuvor, den Viertelbogen AB, so wie den Halbmesser BC in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, hier also beide in 8, ziehe die Neunziger-Sehne AB, und zu dieser aus jedem Theilpunkte des Halbmessers BC Parallele, so wird von der ersten Parallelen der Halbmesser $C1$ in I, von der zweiten Parallelen der Halbmesser $C2$ in II . . . geschnitten, wodurch I, II, III . . . . als Punkte einer krummen Linie entstehen, welche ebenfalls eine Quadratrix genannt werden kann.

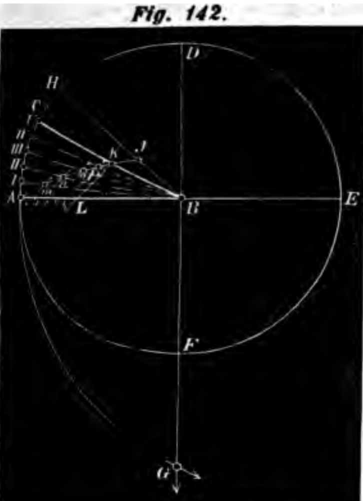
Wie man aus der Construction sieht, fängt diese Quadratrix bei B an und endet im Mittelpunkte.

Will man nun mittels dieser Curve irgend einen Winkel in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, hier z. B. den Winkel $BC5$, etwa in 5 gleiche Theile theilen, so ziehe man die Neunziger-Sehne AB, führe aus dem Punkte V eine Parallele und theile das so erhaltene Stück der BC, d. i. $B5$, in fünf gleiche Theile. Zieht man nun durch jeden dieser Theilpunkte zu AB Parallele bis zur Quadratrix und führt aus dem Scheitelpunkte C durch I, II, III ... die Halbmesser $C1$, $C2$, $C3$ ...., so wird der Bogen $B5$, so wie

der ihm entsprechende Winkel *B C* 5 in fünf gleiche Theile getheilt. Eine Substitution für diese Curve macht man auf folgende *Art*:

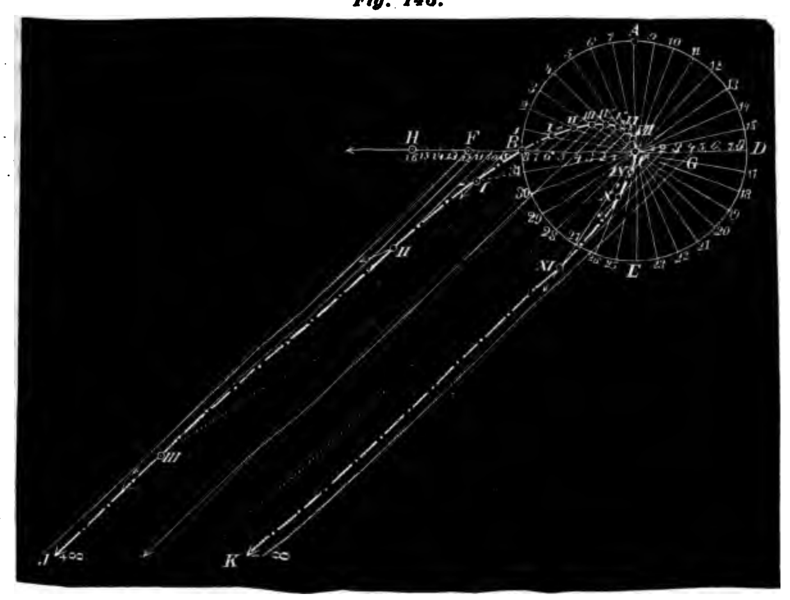
Man zeichne einen Kreis *A D E F* (Fig 142), ziehe in diesem zwei Durchmesser lothrecht auf einander, hier *D F* ⊥ *A E* im Mittelpunkte *B*, und verlängere *D F* über *F* hinab. Durchschneidet man nun diese Verlängerung aus *E* mit *A E* bei *G* und beschreibt aus *G* mit *A G* den Bogen *A J*, so ist dieser der verlangte Substitutionsbogen, welcher jedoch nur für die Winkel bis 45° gilt. Es bildet daher der aus *B* unter 45° gegen *AB* gezogene Halbmesser die Gränze dieses Substitutionsbogens. Hat man nun irgend einen Winkel, z. B. den Winkel *A B C* zu theilen, so verfährt man hier wie in Fig. 141 gezeigt wurde.

Fig. 142.



Es ist wohl nicht uninteressant zu wissen, welche Form diese krumme Linie im Ganzen hat? Theilen wir zu diesem Behufe den Kreis *A B E D* (Fig. 143) in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, hier in 32,

Fig. 143.



und ziehen die Halbmesser; theilen dann den Halbmesser *BC*, so wie *CD* in so viele gleiche Theile, als in wie viele solche Theile der Quadrant getheilt wurde, tragen den einen solchen Theil auch auf der Verlängerung des Halbmessers *BC* auf und ziehen, wie zuvor, aus den Theilpunkten des Halbmessers *BC*, nach aufwärts Parallele bis zum Durchschnitte mit den Halbmessern, so ist der eine mittlere Theil dieser krummen Linie, wie früher, bestimmt; um nun die Punkte unterhalb der *DH* über *C* hinab zu erhalten, müssen die nächstkommenden Parallelen nach abwärts gezogen werden, denn der nächstfolgende Halbmesser kann von der nächstkommenden Parallelen nur in der Verlängerung geschnitten werden; also hier in *IX*, unterhalb *C*. Gleiches gilt auch von jedem andern der Reihe nach zu bestimmenden Punkte *X*, *XI*, *XII*....; und es wird die durch den 4. Theilpunkt der *CD* gezogene Parallele zugleich eine Asymptote sein. Denn diese Parallele sollte den Halbmesser *C*12 in der Verlängerung schneiden; nun ist aber *C*12 so wie die Parallele aus 4 unter einem Winkel von 45° gegen den Durchmesser *AB*, also muss diese Parallele nothwendiger Weise eine Asymptote sein.

Dasselbe gilt auch von denjenigen Punkten, welche auf der Gegenseite unterhalb des Punktes *B* zu bestimmen sind; und es wird die durch den Punkt 12 oder *F* der *CH* gezogene Parallele zugleich die Asymptote dieser Curve sein, aus dem ob angeführten Grunde. Man erhält also die beiden Asymptoten, wenn man auf der Verlängerung des Halbmessers *BC* beiderseits den halben Halbmesser aufträgt und aus diesen Punkten unter 45° Parallele führt.

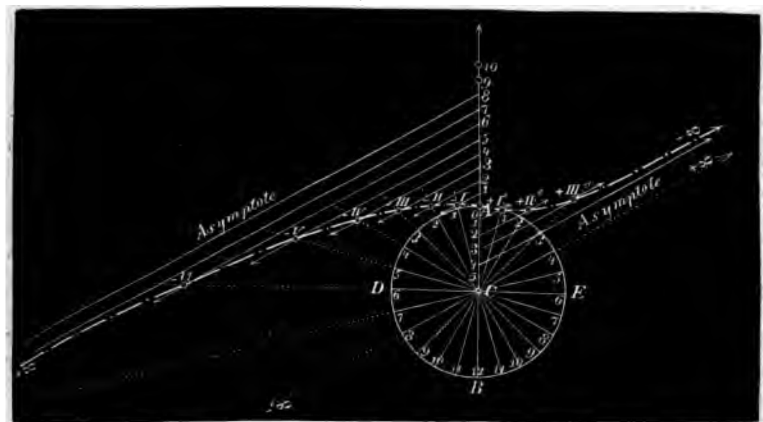
Es geht also diese Linie durch den Mittelpunkt des Grundkreises, schneidet den Kreis zweimal und läuft in zwei Aesten in's Unendliche fort.

IV. Polysections-Methode.

Bei dem vorhergehenden Verfahren haben wir gezeigt, dass die parallelen Hilfslinien, welche bei der Dinostrat'schen Quadratrix auf dem einen Halbmesser des Quadranten normal, also zu dem andern parallel gezogen wurden, auch unter einem gewissen Winkel gegen diese Halbmesser gezogen werden können. In der nachstehenden Figur wollen wir letzteres gerade entgegengesetzt annehmen und ausführen.

Es sei also *ADBE* (Fig 144) der Grundkreis, welcher in 24

Fig. 144.



gleiche Theile getheilt wurde. Da hierdurch der Quadrant sechs gleiche Theile erhält, so muss auch der Halbmesser, hier *AC*, in sechs gleiche Theile getheilt werden. Ist dies geschehen und fängt man die Construction bei *A* an, indem man die Parallelen unter einem beliebigen Winkel, z. B. unter einem Winkel von 60° gegen *AC* zieht, so wird man hier rechts nur 3 Punkte für die krumme Polysectionslinie bestimmen können, nämlich + *I*, + *II*, + *III*; und die aus dem Punkte 4 des Halbmessers *AC* gezogene Parallele wird den Halbmesser *C*4 erst in unendlicher Entfernung schneiden, d. h. sie wird eine Asymptote dieser Curve sein.

Um nun auf der entgegengesetzten Seite die Punkte der Curve zu bestimmen, muss man den einen Theil des Halbmessers auf dessen Verlängerung auftragen; und werden aus den so erfolgten Punkten die Parallelen gezogen, so müssen die betreffenden Halbmesser entsprechend verlängert werden, bis die Parallelen der Ordnung nach geschnitten werden, wodurch man hier 8 Punkte der Curve bestimmt, nämlich — *I*, — *II*, — *III*, ... — *VII*; der achte Punkt liegt in der Verlängerung des Halbmessers *C*7 und in der aus 7 gezogenen Parallelen, und der 8. Punkt in der Verlängerung des Halbmessers *C*8 und in der aus 8 gezogenen Parallelen; da aber beide Linien gleiche Winkel gegen AC bilden, so sind sie zu einander parallel, somit liegt der diesfällige Punkt der Curve erst in unendlicher Entfernung; es wird somit die aus 8 gezogene Parallele die Asymptote der Curve sein.

Man sieht also daraus:

1. Dass die Curve von dem Kreispunkte A angefangen nach beiden Richtungen ins Unendliche fortgeht;

2. dass sie zwei Asymptoten hat;

3. dass der transversale Abstand der Asymptoten auf den verticalen Halbmesser und deren Verlängerung, d. i $4 A 8$ gleich dem Durchmesser des Grundkreises ist;

4. dass man mit dieser Curve von $+\infty$ durch A bis $-\infty$ gedacht, oder von A bis $+\infty$ und $-\infty$ genommen, den ganzen Halbkreis in eine beliebige Anzahl gleicher Theile theilen kann;

5. dass man mit dieser Curve von A bis $-VI$ genommen, den Viertelkreis ACD vollständig in eine beliebige Anzahl gleicher Theile theilen kann.

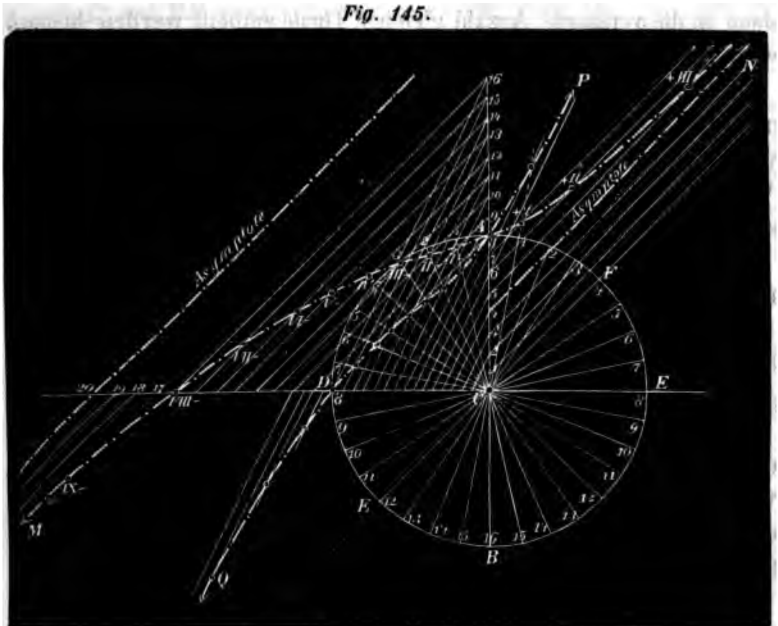
Die Theilung geschieht auf folgende Art: Soll der Quadrant ACD z. B. in 6 gleiche Theile getheilt werden, so theile man den Halbmesser AC in 6 gleiche Theile und trage einen solchen Theil auf dessen Verlängerung 6mal auf (oder was dasselbe ist, man mache die Verlängerung $A6 = AC$ und theile $A6$ in 6 gleiche Theile); verbindet man nun den Punkt 6 mit $-VI$ durch eine Gerade, zieht zu dieser aus den Theilpunkten der $A6$ zu $-VII\,6$ Parallele und verbindet die so erfolgten Punkte der Curve mit dem Mittelpunkte des Grundkreises, so wird dessen Quadrant ACD sammt dem Bogen AD in die verlangte Anzahl gleicher Theile, hier in 6, getheilt.

Diese Theilung wird jedoch, wie man aus der Construction sieht, nur für die Winkel vom kleinsten bis etwa zu dem von 45^0 genau ausfallen können, weil die andern Punkte auf der Curve wegen der schiefen Stellung, die die Parallelen haben, nicht deutlich genug sind und daher auch auf dem Kreisbogen einen merklichen Fehler verursachen.

Man kann jedoch die Richtung der Parallelen so wählen, dass sie mit den Halbmessern zum gehörigen Durchschnitte gebracht, eine Polysectionslinie geben, mittels welcher sich die Theilung viel schärfer, daher auch viel genauer vornehmen lässt. Man kann ferner die Parallelen entweder nach der einen oder auch nach der entgegengesetzten Richtung führen. Jedesmal aber wird die Polysections-Curve durch den Anfangspunkt A durchgehen und denselben entweder nur berühren oder nochmals schneiden.

Nehmen wir nun in (Fig. 145) die Richtung der Parallelen unter

Fig. 145.



45° gegen den Halbmesser *AC* an, theilen den Kreis *ADBE* in 32 gleiche Theile, wodurch der Halbkreis 16 und der Viertelkreis 8 solche Theile erhält; theilen wir daher auch den Halbmesser *AC* in 8 gleiche Theile und tragen einen solchen Theil auf der Verlängerung des Halbmessers *AC* noch achtmal auf, bis 16, so hat man, wenn bei *A* angefangen und die Halbmesser oder nöthigenfalls ihre Verlängerungen zum Durchschnitte mit den entsprechenden Parallelen gebracht werden, auf der rechten Seite für den einen Ast 8 Punkte und auf der linken Seite für den zweiten Ast 9 Punkte der Curve *MAN*.

Mit dem Theile *A VIII* dieser Curve kann man also den Quadranten *ACD* in eine beliebige Anzahl gleicher Theile theilen, indem man auf die obgesagte Art verfährt.

Auch diese Curve fängt bei *A* an, durchschneidet auf der einen Seite den Kreis, und geht nach zwei Richtungen in's Unendliche fort; sie hat ferner, wie die frühere, zwei Asymptoten, welche unter einem Winkel von 45° gegen den Durchmesser *AB* gezogen werden, also unter demselben Winkel gegen *AB* gehen, unter welchem auch die Parallelen gegen *AB* geführt wurden.

Es wird daher mittels dieser Curve der Halbkreis *EDAF* dann in die verlangte Anzahl gleicher Theile getheilt werden können, wenn man sich dieselbe beiderseits ins Unendliche fortgesetzt denkt.

Wollte man auch den zweiten Halbkreis theilen, so müsste man auf der entgegengesetzten Seite eine solche Curve construiren, und zwar müsste man hier den Halbmesser *CE*, so wie dessen Verlängerung eintheilen, bei dem Punkte *E* anfangen und die Construction, wie oben, nach beiden Richtungen ins Unendliche fortsetzen.

Nimmt man in derselben Figur die Richtung der Parallelen unter einem andern Winkel an, z. B. so, dass die aus dem Punkte 16 der Verlängerung der *AC* geführte Parallele durch den Punkt D geht, so wird die hierdurch erhaltene Curve *PADQ* durch *D* gehen müssen.

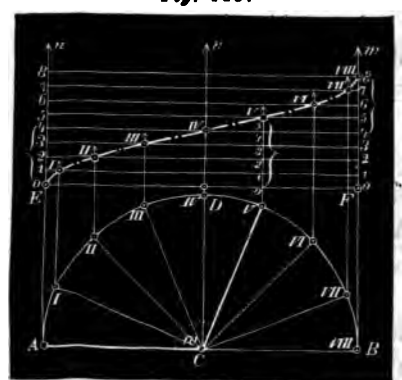
Man sieht also daraus, dass dieses Verfahren unzählig viele Curven gibt, welche durch den Punkt *A* des Grundkreises gehen. Von allen diesen können jedoch nur solche zur Theilung benützt werden, welche ziemlich scharfe und deutliche Durchschnittspunkte bei der Anwendung derselben zur Theilung geben.

V. Polysections-Methode

(mittels der Schraubenlinie, die Tschirnhaus'sche Quadratrix mitbegriffen).

Man zeichne zuerst einen Halbkreis *ADBC* (Fig. 146), theile ihn in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, hier z. B. in 8, errichte in *A, C, B* die *Au, Cv, Bw* ⊥ *AB*, ziehe in einer beliebigen Entfernung zum Durchmesser *AB* eine Parallele, also *EF* ∥ *AB*, und führe auf diese aus den Theilpunkten der Peripherie Lothrechte, hier die *II, II II, III III* . . . . sämmtlich lothrecht auf *EF*. Hierauf trage man auf *Eu* von *E* aus eine beliebige Einheit *E*1 so oftmal auf, als in wie viele gleiche Theile der Halbkreis getheilt wurde, und ziehe durch die so erhaltenen Punkte der *Eu* zu *EF* Parallele, so gibt die 1. Parallele mit der auf *EF* aus *I* der Pe-

Fig. 146.



ripherie gezogenen Normalen den Punkt *I*; die 2. Parallele mit der 2. aus *II* auf *EF* gezogenen Normalen den Punkt *II* . . . . für die halbe Windung der Schraubenlinie.

Soll nun mittels dieser Linie irgend ein Winkel, z. B. der Winkel *ACV*, etwa in 5 gleiche Theile getheilt werden, so führe man aus *V* auf *EF* eine Normale *VV*, theile deren Stück *oV* in 5 gleiche Theile, ziehe durch jeden dieser Punkte Parallele mit *EF* nach links, so dass der Theil *EV* der Schraubenlinie in *I, II, III, IV* geschnitten wird, und ziehe aus jedem dieser Punkte auf *EF* Normale bis zu der Peripherie, wodurch

arc $AI = III = IIIII, = IIIIV = IVV$ erfolgt.

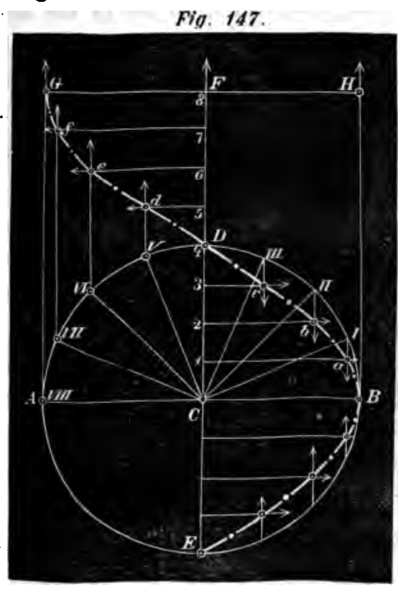
Verbindet man zuletzt diese Theilpunkte der Peripherie mit dem Mittelpunkte *C*, so erhält man ferner

$\measuredangle\, ACI = ICII = IICIII = IIICIV = IVCV = \frac{1}{5} ACV$

mathematisch richtig, weil die krumme Linie *CIII*, ... *VIII* diese Eigenschaft hat.

Wie man aus der Zeichnung sieht, wäre dieses Verfahren in dem angenommenen Falle für die Praxis von keinem besonderen Werthe, weil man darnach die Theilpunkte auf der Schraubenlinie sehr undeutlich bestimmen, folglich auch die Theilpunkte auf dem Bogen des zu theilenden Winkels ebenso ungenau erhalten würde.

Fig. 147.



Um jedoch mittels dieser Linie die Theilung so genau als möglich zu erhalten, muss sie so construirt werden, dass sie von der zum Durchmesser *AB* gezogenen Parallelen sehr deutlich und scharf geschnitten werde.

Man verfährt also in diesem Falle auf folgende Art: Man theilt den Quadranten *BD*, so wie den Halbmesser *CD* (Fig. 147) in dieselbe Anzahl gleicher Theile, hier z. B. in 4; zieht durch die Punkte *I, II, III* Verticale und, durch die Punkte 1, 2, 3, Horizontale, welche sich

schneiden und *a*, *b*, *c*, als Punkte des einen Stückes der Schraubenlinie, hier *BabcD* geben, mittels welcher man den Quadranten *BD* in eine beliebige Anzahl gleicher Theile theilen kann, und zwar mit einer viel grösseren Genauigkeit, als dies zuvor der Fall war.

Trägt man ferner den einen Theil des Halbmessers *CD*, hier den vierten, auf der Verlängerung dieses Halbmessers über *D* hinaus noch viermal auf, so erhält man *d*, *e*, *f* als die weiteren 3 Punkte, somit *BabcDdefG* als die halbe Windung der Schraubenlinie, mittels welcher man den Halbkreis *ADB* in eine beliebige Anzahl gleicher Theile theilen kann.

Dies geschieht zunächst dadurch, indem man die Gerade *CF* in die verlangte Anzahl gleicher Theile theilt, durch die Theilpunkte bis zu der Schraubenlinie mit *AB* Parallele zieht, und von den so erhaltenen Punkten bis zu der Peripherie Verticale führt.

Construirt man nun diese Figur auch unterhalb *AB*, so kann man damit den ganzen Kreis theilen; allein dies ist, praktisch genommen, ganz überflüssig, weil nur die halbe Windung der Schraubenlinie hinreicht, um den ganzen Kreis zu theilen; ja man kann nur mit der Viertelwindung den ganzen Kreis theilen, ob die Anzahl der Theile paar oder inpaar ist.

Hat man nun die Viertelwindung construirt, so ist es die sogenannte Tschirnhaus'sche Quadratrix, wie dies die Figur (Fig. 148) zeigt, weil die Construction der Tschirnhaus'schen Quadratrix ganz dieselbe ist, wie jene der Schraubenlinie.

Fig. 148.

Betrachtet man nun diese Quadratrix, so sieht man leicht ein, dass man mittels derselben jeden beliebigen Winkel im Quadranten von dem einen oder dem andern Endpunkte angefangen theilen kann, was bei der Dinostrat'schen Quadratrix nie sein kann.

Es sind wohl auch hier (Fig. 148) an dem Endpunkte *B* die Durchschnittspunkte etwas undeutlich, oder so, dass sie leicht den

Fehler veranlassen, allein sie sind dessen ungeachtet weit genauer, als die der ersteren Quadratrix.

Soll also z. B. der Winkel *ACm* getheilt werden, so ziehe man von dem Punkte *m* die *m III* ‖ *AC* und aus *III* die *III* 5 ‖ *BC*; das Uebrige wie zuvor bei der Schraubenlinie.

Sollte der Winkel *BCm* z. B. in 5 gleiche Theile getheilt werden, so ziehe man aus *m* die *m III* ‖ *AC* und aus *III* die *III* 5 ‖ *BC*, theile *C*5 in 5 gleiche Theile, ziehe durch 1, 2, 3, 4 zu *BC* Parallele bis zur Quadratrix und aus den so erfolgten Punkten die Lothe nach aufwärts, bis der Kreisbogen *Bm* geschnitten ist.

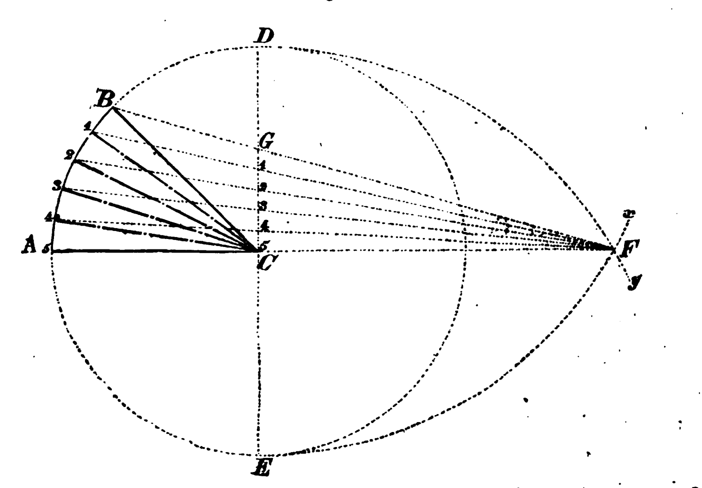
Anmerkung. Auf ähnliche Art kann man jeden beliebigen Winkel, somit auch den ganzen Kreis mittels der Schraubenlinie auf einem Kegel theilen.

VI. Polysections-Methode.

Diese höchst einfache Methode besteht in Nachfolgendem:

Es sei *ACB* (Fig. 149) der zu theilende Winkel und *AB* der ihm entsprechende Bogen.

Fig. 149.



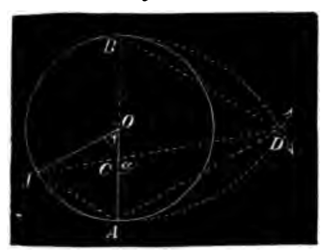
Man ergänze den gegebenen Bogen *AB* zu einem Kreise, verlängere *AC* über *C* hinaus, führe durch den Scheitelpunkt *C* die *DE* normal auf *AC* und beschreibe aus *D* und *E* mit *DE* Bögen, bis sie sich bei *F* schneiden. Soll nun der Winkel *ACB* z. B. in 5 gleiche Theile getheilt werden, so verbinde man *B* mit *F* durch eine Gerade, theile das hierdurch abgeschnittene Segment *CG* in fünf gleiche Theile und

führe durch jeden Theilungspunkt aus dem Punkte F Gerade, welche den Bogen in fünf gleiche Theile theilen. Werden alsdann die so auf dem Bogen AB erfolgten Punkte mit dem Centrum C verbunden, so ist hierdurch auch der Winkel in fünf gleiche Theile annähernd getheilt.

Bei Anwendung dieses Verfahrens wird der untere Halbkreis und eben so auch der Hilfsbogen EF weggelassen.

Dieses Verfahren stimmt mit der sogenannten Renaldinischen Regel, irgend ein regelmässiges Vieleck zu zeichnen, überein, wobei man, was die Rechnung und Construction betrifft, auf folgende Art verfährt:

Fig. 150.



Zeichnet man über dem Durchmesser eines Kreises, hier über AB des Kreises um O (Fig. 150) ein gleichseitiges Dreieck ABD, theilt die AB in n gleiche Theile, verbindet den zweiten Theilungspunkt, hier $C\left(AC = 2 \cdot \frac{AB}{n}\right)$ mit D und verlängert CD bis zum Kreisumfange in J, so ist der Bogen AJ nahe der $n$te Theil des Kreisumfanges und die Sehne AJ nahe die Seite des regelmässigen eingeschriebenen $n$seitigen Vieleckes.

Die Genauigkeit dieses Verfahrens wird auf folgende Art untersucht:

Vermöge der Construction ist der Winkel $BAD = 60^0$, also eine constante Grösse; setzt man nun $AB = d$, also auch $AD = AB = d$, so ist $AC = 2 \cdot \frac{d}{n}$; da also BAD ein gleichseitiges Dreieck ist, so sind in dem Dreiecke ACD die Seiten AC, AD und der von ihnen eingeschlossene Winkel CAD bekannt; setzt man nun den Winkel $ACD = \alpha$, so ist der Winkel

$$ADC = 180^0 - 60^0 - \alpha = 120^0 - \alpha;$$

man hat daher:

$$AD : AC = \sin \alpha : \sin (120^0 - \alpha),$$

oder

$$d : \frac{2}{n} d = \sin \alpha : \sin (\alpha + 60),$$

was uns die Gleichung

$$\sin (\alpha + 60^0) = \frac{2}{n} \sin \alpha \text{ gibt},$$

oder $\sin \alpha . \cos 60^0 + \cos \alpha . \sin 60^0 = \frac{2}{n} \sin \alpha$;

und $\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha = \frac{2}{n} \sin \alpha$,

daraus hat man

$$\tan g\, \alpha = - \frac{n\sqrt{3}}{n-4} \text{ oder } \sin a = \frac{n\sqrt{3}}{\sqrt{(n-4)^2+3n^2}} \ldots .(1).$$

In dem Dreiecke JCO ist nun somit der Winkel α, dann

$$CO = \frac{d}{2} - \frac{2d}{n} = \frac{n-4}{2n} d, \text{ und } JO = \frac{d}{2}$$

bekannt, und man hat dann, wenn $\measuredangle\, AOJ = \varphi$ gesetzt wird:

$$\frac{d}{2} : \frac{n-4}{2n} d = \sin \alpha : \sin(\alpha + \varphi),$$

woraus $\sin(\alpha + \varphi) = \frac{n-4}{n} \sin \alpha$,

oder da $\sin \alpha = \frac{n\sqrt{3}}{\sqrt{(n-4)^2+3n^2}}$,

$$\sin(\alpha + \varphi) = \frac{(n-4)\sqrt{3}}{\sqrt{(n-4)^2+3n^2}} \ldots . (2).$$

Um nun aus den Gleichungen (1) und (2) den bloss von n abhängigen Werth des φ zu finden, verfährt man auf folgende Art:

Die Gleichung (2) gibt

$$\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi = \frac{(n-4)\sqrt{3}}{\sqrt{(n-4)^2+3n^2}};$$

setzt man hier statt $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ ihre Werthe, so hat man:

$$n\sqrt{3} . \cos\varphi + (n-4) . \sin\varphi = (n-4)\sqrt{3},$$

wofür wir der Kürze halber

$$a . \cos\varphi + b . \sin\varphi = c$$

setzen wollen, so ist:

$$a\sqrt{1-\sin^2\varphi} + b . \sin\varphi = c,$$

oder $a\sqrt{1-\sin^2\varphi} = c - b \sin\varphi$,

welches quadrirt, gibt:

$$a^2(1-\sin^2\varphi) = c^2 - 2bc\sin\varphi + b^2 \sin^2\varphi$$

oder $a^2 - c^2 = (a^2+b^2)\sin^2\varphi - 2bc . \sin\varphi$;

daher $\sin\varphi = \frac{bc \pm a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}$,

oder $\sin\varphi = \frac{(n-4)^2\sqrt{3} \pm n\sqrt{3}\sqrt{3n^2-2(n-4)^2}}{3n^2+(n-4)^2}$

Wir ziehen hier zur Berechnung die Formeln (1) und (2) vor.

Da wir nämlich:

$$\sin\alpha = \frac{n\sqrt{3}}{\sqrt{(n-4)^2+3n^2}} \ldots (\alpha),$$

$$\sin(\alpha+\varphi) = \frac{(n-4)\sqrt{3}}{\sqrt{(n-4)^2+3n^2}} \ldots (\beta),$$

also

$$\cos\alpha = \frac{n-4}{\sqrt{(n-4)^2+3n^2}} \ldots (\gamma),$$

$$\cos(\alpha+\varphi) = \sqrt{\frac{3n^2-2(n-4)^2}{(n-4)^2+3n^2}} \quad (\delta)$$

haben, und

$$\sin(\alpha+\varphi)\cos\alpha - \cos(\alpha+\varphi)\sin\alpha = \sin(\alpha+\varphi-\alpha) = \sin\varphi$$

ist, so hat man

$$\sin\varphi = \sin(\alpha+\varphi)\cos\alpha - \cos(\alpha+\varphi)\sin\alpha,$$

und

$$\cos\varphi = \cos(\alpha+\varphi)\cos\alpha + \cos(\alpha+\varphi)\sin\alpha.$$

Man hat also nur in den Formeln α, β, γ, δ den Werth des n zu substituiren und die gefundenen Werthe in eine der letzten Formeln zu setzen.

Setzen wir nun hier statt n die Werthe 7, 8, 9, 10 u. s. w., so hat man:

Für $n = 7$, $\alpha = 103^0\,53'\,53''$; $\alpha+\varphi = 155^0\,24'\,58''$;
$\varphi = 51^0\,31'\,5''$; also der Fehler $F = 0^0\,5'\,22''$;

„ $n = 8$, $\alpha = 106^0\,6'\,8''$; $\alpha+\varphi = 151^0\,17'\,22''$;
$\varphi = 45^0\,11'\,14''$; also der Fehler $F = 0^0\,11'\,14''$;

„ $n = 9$, $\alpha = 107^0\,47'\,1''$; $\alpha+\varphi = 148^0\,3'\,41''$;
$\varphi = 40^0\,16'\,40$; also der Fehler $F = 0^0\,16'\,40''$;

„ $n = 10^0$, $\alpha = 109^0\,6'\,24''$; $\alpha+\varphi = 145^0\,27'\,45''$;
$\varphi = 36^0\,21'\,21''$; also der Fehler $F = 0^0\,21'\,21''$

u. s. w.

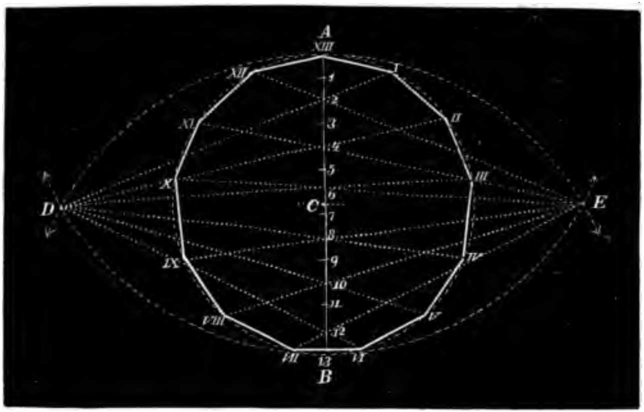
Für $n = 18$ steigt der Fehler bis auf 38'; bei 25, 30, 40 u. s. w. nimmt dann der Fehler wieder ab.

Man sieht also daraus, dass der Werth der Renaldini'schen Regel, die man beinahe in allen praktischen Büchern angeführt findet, ziemlich beschränkt ist.

Dessenungeachtet kann man davon eine Anwendung machen, wobei man bei der Construction des ganzen Polygons auf folgende Art verfährt: Man ziehe in dem gegebenen Kreise, hier im Kreise um C

(Fig. 151), in welchem ein Polygon, hier z. B. ein *XIII* Eck, einge-

Fig. 151.



schrieben werden soll, den Durchmesser *AB*, und theile ihn in so viele gleiche Theile, als wie viel das Vieleck Seiten bekommen soll. Nun beschreibe man aus den Endpunkten des getheilten Durchmessers mit dem Halbmesser gleich diesem Durchmesser zwei Kreisbögen, so dass sie sich, hier bei *D* und *E*, schneiden, und ziehe aus *D* und *E* durch jeden 2. Theilungspunkt der *AB* Gerade bis zur Peripherie des zu theilenden Kreises, also hier aus *D* durch 2, 4, 6, 8 . . . die Geraden *D I*, *D II*, *D III* . . . .; so werden *I*, *II*, *III* . . . . als die Theilungspunkte der Peripherie oder Eckpunkte des verlangten Polygons erfolgen.

Viel richtiger wird man jedoch dadurch verfahren, indem man nur den einen Theilungspunkt sucht, dann die so erfolgte Sehne, hier *AI* in Zirkel fasst und auf der Peripherie aufträgt; denn erstens ist bei dem ersten Theile nur ein sehr geringer Fehler, zweitens bestimmt man die Theilungspunkte auf der Peripherie mittels des Auftragens bedeutend richtiger, als dies nach einer noch so genauen und mathematisch richtigen Construction geschehen kann. Diese Schwierigkeit liegt vornehmlich darin, weil man durch zwei Punkte nur selten eine Gerade in der geringen Distanz genau führen kann, was hier auch der Fall ist. Es ist wohl mathematisch richtig, dass durch 2 Punkte nur eine einzige Gerade möglich, also genau bestimmt ist, allein beim Zeichnen wird die Richtung meistens nur annähernd erhalten und es sind desshalb beim Zeich-

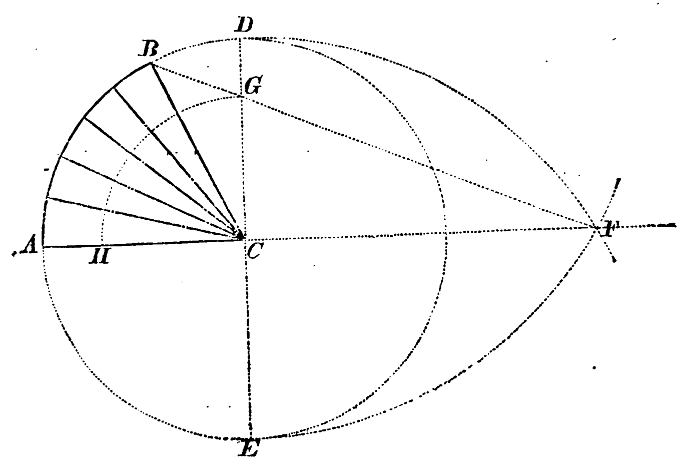
nen für die genaue Bestimmung der Richtung einer Geraden wenigstens 3 Punkte erforderlich, was hier nicht der Fall ist.

VII. Polysections-Methode.

Diese Methode ist insbesondere dann anwendbar, wenn der Quadrant in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt worden ist, und man soll irgend einen Bogen in eben so viele gleiche Theile theilen.

Es ist der Quadrant *GH* (Fig. 152) z. B. in fünf gleiche

Fig. 152.



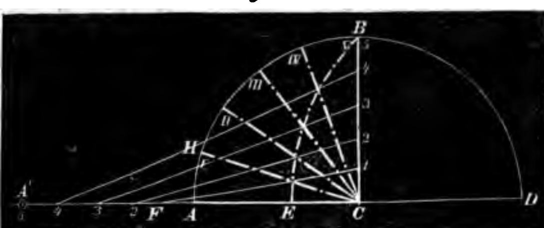
Theile getheilt, man soll den Bogen *AB* in eben so viele gleiche Theile theilen. — Man ergänze den Bogen *AB* zu einem Kreise, verlängere *AC* über *C* hinaus, führe durch *C* die *DE* normal auf *AC*, und beschreibe aus *E* und *D* Bögen, bis sie sich (hier bei *F*) schneiden. — Ist nun der Viertelbogen *GH* in die verlangte Anzahl gleicher Theile getheilt, so lässt sich ein solcher Theil des Bogens *GH* auf dem zu theilenden Bogen *AB* eben so oftmal auftragen, wobei der Fehler äusserst gering ist.

Es lässt sich daher nach dieser Methode mit grosser Bequemlichkeit jeder Bogen in solche Anzahl gleicher Theile theilen, in welche der Viertelbogen sich geometrisch eintheilen lässt.

VIII. Polysections-Methode.

Um einen Quadranten in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, z. B. den Quadranten *AB* in fünf gleiche Theile

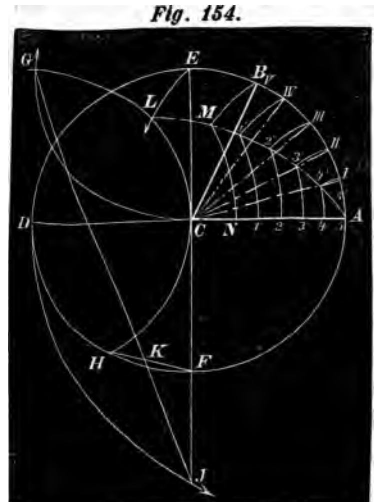

Fig. 153.



(Fig. 153), beschreibe man aus dem Punkte *D* mit dem Radius gleich der Neunziger - Sehne *BD* den Bogen *BE*, theile dann den Halbmesser *BC* in die verlangte Anzahl gleicher Theile, hier in 5, verlängere den Halbmesser *AC* über *A* hinaus und trage auf dieser Verlängerung einen solchen Theil auf; d. h. man mache $AF = C1$ (der *BC*). Wird alsdann *F* mit 1 durch eine Gerade verbunden und durch den so auf *BE* erfolgten Durchschnittspunkt aus dem Mittelpunkte *C* eine Gerade bis zu der Peripherie geführt, so wird durch diese das Bogenstück $AH = \frac{1}{5} AB$ abgeschnitten.

Man könnte die *AF* auf *AA'* noch weiter auftragen, d. h. noch 4mal, und wie in der Figur gezeigt ist, verfahren, allein es ist nicht rathsam, sich darauf zu verlassen, weil alle andern Punkte mehr oder weniger gefehlt sind; es wird daher nur dieser 1. Theil benützt, und zwar aus dreierlei Gründen: *a*) weil nur dieser als mathematisch richtig angenommen werden kann; *b*) weil man keine grosse Verlängerung braucht; *c*) weil man ohnehin die Punkte untersuchen muss, obschon sie auch richtig mathematisch wären, da man mittels des Auftragens die Punkte viel genauer bestimmt, als nach noch so richtiger mathematischer Construction.

Fig. 154.



IX. Polysections - Methode.

Um einen beliebigen Winkel bis 90° in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, z. B. den Winkel *ACB*, (Fig. 154), ergänze man dessen Bogen *AB* zu einem Kreise, führe durch *C* die $JE \perp AD$, beschreibe aus *E* mit *EC* den Bogen *CG* und aus *D* mit demselben Radius den Bogen *GCH*, ferner aus *A* mit *AD* den

Bogen DJ, verbinde dann G mit J, und H mit F durch Gerade, und aus deren Durchschnittspunkte K beschreibe mit dem Radius gleich der Entfernung AK den Bogen AL, welcher ein Polysectionsbogen sein wird.

Soll nun mittels dieses Bogens irgend ein Winkel in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt werden, z. B. der Bogen AB in fünf gleiche Theile, so beschreibe man mit der Sehne AB den Bogen BM, und aus D mit DM den Bogen MN; theile das Segment AN in die verlangte Anzahl gleicher Theile (also hier in 5), beschreibe dann aus D durch jeden Theilungspunkt bis zu dem Polysectionsbogen AM Kreisbögen und durchschneide aus A mit $A4'$, $A3'$ $A2'$, $A1'$ die Peripherie in I, II, III, IV, wodurch

$$\text{arc } AI = III = IIIII = IIIIV = IVV \text{ wird.}$$

Verbindet man zuletzt die Theilpunkte $I, II, III, IV \ldots$ mit C, so erhält man:

$$\sphericalangle ACI = ICII = IICIII = \ldots = \tfrac{1}{5} ACB.$$

Der Bogen AL ist also nur ein substituirter Bogen für eine Polysections-Curve, welcher mit dieser bis 90°, d. i. bis L ziemlich genau zusammenfällt, und dann eine Richtung gegen D nimmt.

X. Polysections-Methode.

Es sei ACB (Fig. 155) der gegebene Winkel, welcher in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt werden soll, hier z. B. in 5 gleiche Theile.

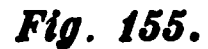
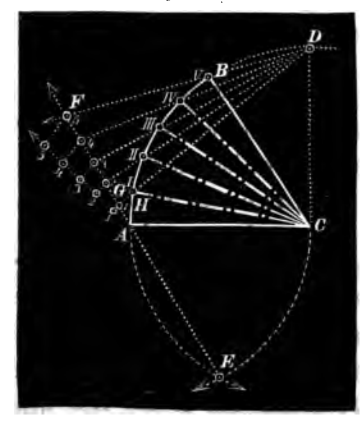


Fig. 155.



Man errichte in dem Scheitelpunkte C auf dem einen Schenkel, hier auf AC, eine Normale, mache sie gleich AC, beschreibe dann mit dem Halbmesser AC aus A und C Kreisbögen bis E, führe aus diesem Punkte durch A eine Gerade EF und aus dem Punkte D durch B ebenfalls eine Gerade, welche sich bei F durchschneiden; wird alsdann das abgeschnittene Stück AF in die verlangte Anzahl gleicher Theile getheilt, und der so erhaltene erste Theilungspunkt G

mit D durch eine Gerade verbunden, so schneidet diese auf dem gegebenen Bogen AB das Stück $AH = \frac{1}{8} AB$ ab.

Hierbei ist jedoch das zu bemerken, dass man auf dem Bogen AB vermittelst der weiteren Theilungspunkte keine weitere Eintheilung machen darf; weil nur dieser erste Theil sehr nahe an Richtigkeit ist. Die weiteren Theilungspunkte auf dem gegebenen Bogen AB werden am besten vermittels des Auftragens des schon gefundenen Theiles AH gefunden.

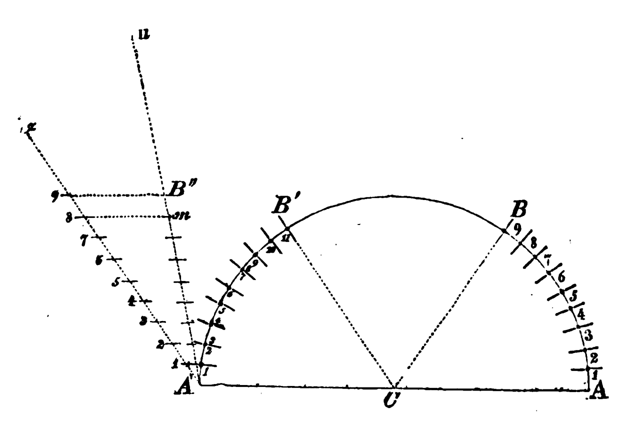
XI. Polysections-Methode.

Diese Methode hängt von der Verwandlung irgend eines Bogens, eines Viertelbogens oder eines Halbkreises in eine Gerade.

Man verwandle den gegebenen Bogen in eine Gerade, theile diese in die verlangte Anzahl gleicher Theile, so lässt sich ein solcher Theil auf dem zu theilenden Bogen so oftmal auftragen, als in wie viele gleiche Theile dieser Bogen und der ihm entsprechende Winkel getheilt werden soll.

Es soll im Halbkreise $ABB'A'$ z. B. der Winkel ACB (Fig. 156)

Fig. 156.



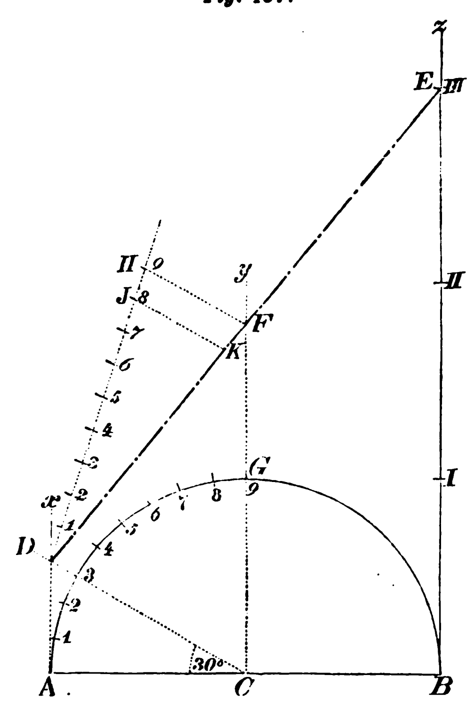
in neun gleiche Theile getheilt werden. — Man mache $A'B'$ = dem gegebenen Bogen AB, nehme auf $A'B'$ ein beliebiges Stück als Einheit an und trage es auf $A'B'$ so oft auf als es geht, ziehe eine beliebige Gerade $A'u$, worauf dieses Element so oft aufgetragen wird, als wie oft es in dem Bogen $A'B'$ enthalten war; bleibt auf $A'B'$ ein Rest, so wird auch dieser auf die

Gerade $A'u$ aufgetragen. Nun ziehe man die zweite Hilfslinie $A'z$, trage auf dieser ein beliebiges Stück so oft auf, als es Theile werden sollen, verbinde den zuletzt auf $A'z$ aufgetragenen Punkt 9 mit B'', ziehe durch den Punkt 8 zu 9 B'' eine Parallele, so lässt sich das Stück $B''m$ auf dem gegebenen Bogen AB neunmal auftragen.

Bei der Theilung des Viertelkreises nach dieser Methode kann man auf folgende Art verfahren:

Man zeichne mit einem beliebigen Radius einen Halbkreis, errichte auf AB (Fig. 157) in A, C und B Senkrechte, mache

Fig. 157.



AD = der Tangente von 30°, und die BE = dem dreifachen Halbmesser BC, verbinde D mit E, so ist die Gerade DE = dem halben Umfange. Wird ferner CG so weit verlängert, dass sie die DE in F schneidet, so ist $DF = EF$ gleich dem Viertelbogen.

Wird nun die Gerade DF oder EF in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt, so lässt sich ein solcher Theil auf dem Viertelbogen AG so oft auftragen, als in wie viele Theile die Gerade DF oder EF getheilt wurde. Dieses Verfahren ist viel richtiger und einfacher als das vorhergehende, daher für's praktische Zeichnen empfehlbar.

Nach dieser Methode wird man dann desto richtigere Resultate erhalten, je kleiner der Theil eines Bogens oder der Peripherie sein soll; allein selbst auch bei grösseren Theilen ist der Fehler nicht so bedeutend; denn versucht man nur, wie sich die Hälfte des Bogens AG zu der DF verhält, so findet man, dass die Hälfte

von *DF* auf *AG* zweimal enthalten ist und der mit freiem Auge bemerkbare Fehler beträgt nur wenige Minuten.

Wird ein Drittel von *DF* auf *AG* aufgetragen, so ist es schon bedeutend genauer und es wird der Rest oder der Fehler bedeutend kleiner sein wie zuvor.

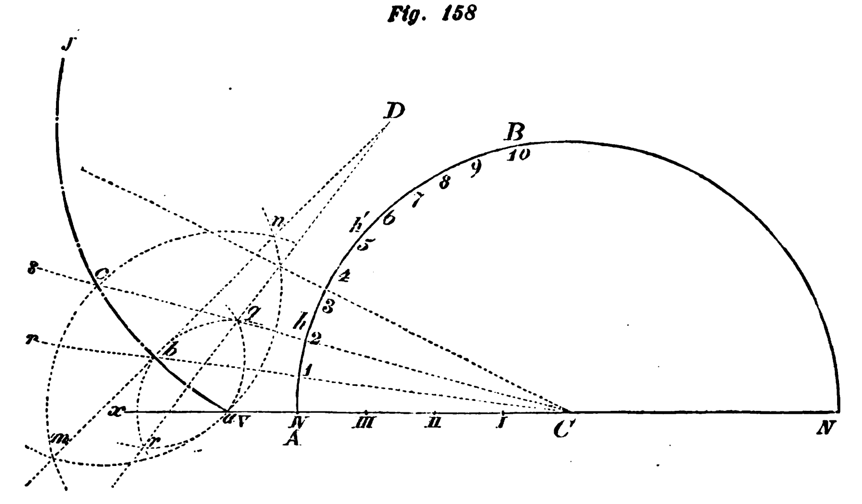
Es wird also sofort die Genauigkeit desto grösser sein, je grösser die Anzahl Theile ist, in welche der gegebene Bogen getheilt werden soll. — Eben so kann man den Halbkreis und auch den ganzen Kreis theilen.

XII. Allgemeine Methode der Multisection.

Construction des Multisectionsbogens.

Man ziehe eine beliebige Gerade *Cx* (Fig. 158), trage auf dieser von *C* aus ein beliebiges als Einheit angenommenes Stück so

Fig. 158



oft auf, als in wie viele gleiche Theile der gegebene Bogen getheilt werden soll, hier *CI*, fünfmal auf, beschreibe dann aus *C* mit dem Halbmesser gleich 4 solchen Theilen einen Halbkreis *ABN* und trage auf diesem von A aus ein beliebiges Bogenstück doppelt so oftmal auf, als in wie viel der gegebene Bogen getheilt werden soll, hier *AI* auf *AB* zehnmal; ziehe ferner aus C durch den ersten und zweiten Theilungspunkt die Geraden *Cr* und *Cs* und durchschneide

diese Linien aus dem Punkte a mit der Sehne desjenigen halben Winkels, dessen fünften Theil jede dieser Linien abschneidet. Hier wird die Cr aus a mit $Ah = \frac{1}{2} Ah'$ in b, so wie die Cs aus demselben Punkte mit $Ah' = \frac{1}{2} AB$ in c geschnitten. Bei der Bestimmung dieser zwei Punkte müssen die Hilfsbögen so gezogen werden, dass man aus den gefundenen Punkten b und c mit dem entsprechenden Halbmesser auch die 4 Punkte m, n, p, q erhält. Nun lege man durch m und n, so wie durch p und q zwei Gerade, welche den Durchschnittspunkt D geben. Wird nun aus D mit der Entfernung aD der Bogen aJ beschrieben, so ist dieser der verlangte Fünftheilungsbogen.

Mittels dieses Bogens wird die Eintheilung auf folgende Art vorgenommen: Man fasse die Sehne des halben gegebenen Winkels in Zirkel und trage sie von a aus auf diesem Bogen, verbinde dann den so erfolgten Punkt mit C durch eine Gerade, welche von dem auf ABN gegebenen Bogen AB den fünften Theil abschneidet.

Dieses Verfahren ist äusserst genau etwa bis 90°, wohl auch darüber, allein es ist etwas complicirt, daher zeitraubend.

Auf ähnliche Art kann jeder beliebige Winkel in 4, 5, 6, 7, 8, 9 . . . . n gleiche Theile getheilt werden, wo natürlicher Weise für jede Anzahl Theile ein eigener Bogen construirt werden muss.

Es ist wohl gleichgiltig, wo der Anfangspunkt für die Multisectionsbögen angenommen wird.

Bei der Theilung solcher Winkel, die über 90° sind, muss der Bogen halbirt, von der Hälfte der verlangte Theil gesucht, und letzterer dann doppelt genommen werden.

Man kann aber den gegebenen Winkel auch in zwei ungleiche Theile theilen und von jedem solchen Theile das Verlangte suchen, welches zusammen genommen den verlangten $n$ten Theil geben muss.

Es ist daher bei diesem Verfahren gleichgiltig, ob man den gegebenen Winkel zuerst in vier gleiche Theile, oder ob man solche in zwei ungleiche Theile theilt und dann jeden solchen halbirt; es muss jedesmal die Halbirung zweimal vorgenommen werden.

Da dieses Verfahren nur eine Substitutions-Methode ist, so können darnach natürlicher Weise nur diejenigen Winkel sehr genau getheilt werden, welche zwischen dem Kleinsten und dem von 60 bis etwa 90° enthalten sind, und die Genauigkeit dieses Verfahrens hängt von der Richtigkeit der Substitution ab.

XIII. Polysections-Methode.

Man theile den Quadranten ACB (Fig. 159) in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, hier in 8, und ziehe die Theillinien CI, CII, $CIII$ . . .; theile dann auch den Halbmesser AC in dieselbe Anzahl gleicher Theile, und beschreibe aus dem Scheitelpunkte C (als Mittelpunkt angenommen) durch jeden Theilpunkt des Halbmessers AC Kreisbögen so, dass die erste Theillinie, d. i. CI in a, die zweite, d. i. CII in b, die dritte, d. i. $CIII$ in c u. s. w. geschnitten werden, wodurch man a, b, c, d, e, f, g als Punkte für die verlangte Quadratrix erhält. — Verbindet man nun A mit a, a mit b, b mit c . . . . gehörig mit einander, so erfolgt $AabcdefgC$ als die verlangte Quadratrix, welche ihren Anfangspunkt in A und ihren Endespunkt in C hat, sobald man nur den Quadranten theilen will.

Fig. 159.

Sollte nun der rechte Winkel ACB in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, hier z. B. in 8, getheilt werden, so theile man den Halbmesser AC in die verlangte Anzahl gleicher Theile, beschreibe aus C mit $C1$, $C2$, $C3$ ... Kreisbögen so weit, dass die Quadratrix in a, b, c, d, e . . . . geschnitten wird, und führe durch diese Durchschnittspunkte aus dem Scheitelpunkte C die Halbmesser CI, CII, $CIII$ . . ., wodurch die verlangte Theilung erfolgt.

Sollte aber mittels dieser Quadratrix irgend ein Winkel in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, hier z. B. der Winkel ACV in 5 gleiche Theile, getheilt werden, so construire man zuerst die Quadratrix $Aabcde$ also bis e, d. h. bis der Schenkel CV des zu theilenden Winkels in e geschnitten ist, beschreibe dann aus dem Scheitelpunkte C mit dem Halbmesser $= Ce$ den Bogen $e5$, theile ferner das so auf dem Schenkel AC erhaltene Segment $A5$ in 5 gleiche Theile, beschreibe aus C mit $C1$, $C2$, $C3$, $C4$ die Kreisbögen $1a$, $2b$, $3c$, $4d$, und führe zuletzt aus C durch die Durchschnittspunkte a, b, c, d die Halbmesser CI, CII, $CIII$, CIV,

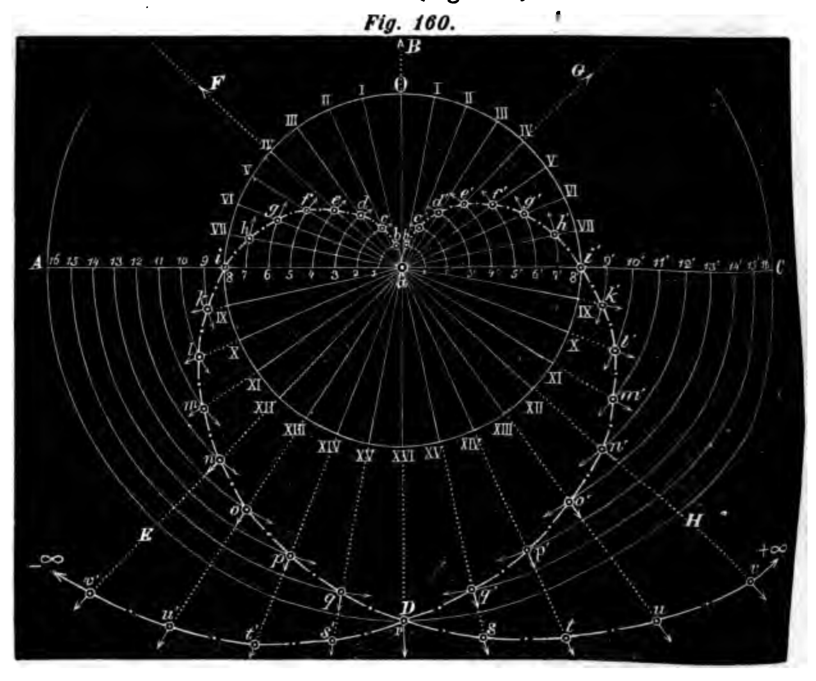
welche den gegebenen Winkel *ACV* und den ihm entsprechenden Bogen *AV* in 5 gleiche Theile theilen.

Da die Auflösung mathematisch genau ist, so wird auch das Resultat desto mehr sich dieser Genauigkeit nähern, je richtiger man zeichnet und je genauer dadurch die Quadratrix bestimmt wird.

Vergleicht man diese Auflösung mit der des Dinostrates, so hat man in dieser die beiden Endpunkte genau bestimmt, während man bei jener nur den Anfangspunkt genau weiss, der zweite Endpunkt lässt sich nach der Dinostrat'schen Angabe nicht ausmitteln. Auch sind bei dieser Auflösung alle Punkte der Quadratrix sehr scharf und deutlich bestimmt, während man bei der Dinostrat'schen Auflösung diejenigen Punkte, welche sich dem zweiten unbestimmten Endpunkte nähern, sehr undeutlich findet, weil diejenigen Linien, welche die Punkte bestimmen, nur sehr schiefe Schnitte geben, und zwar ist dies desto mehr der Fall, je mehr man sich dem unbestimmten Punkte nähert.

Ohne uns in die weiteren Untersuchungen der Eigenschaften dieser Linie einzulassen, wollen wir nur noch zeigen, wie man diese Linie constructiv weiter fortsetzt, um mittels dieser den ganzen Kreis zu theilen. Es sei aus *a* mit *ai* (Fig. 160) ein Kreis beschrieben.

Fig. 160.



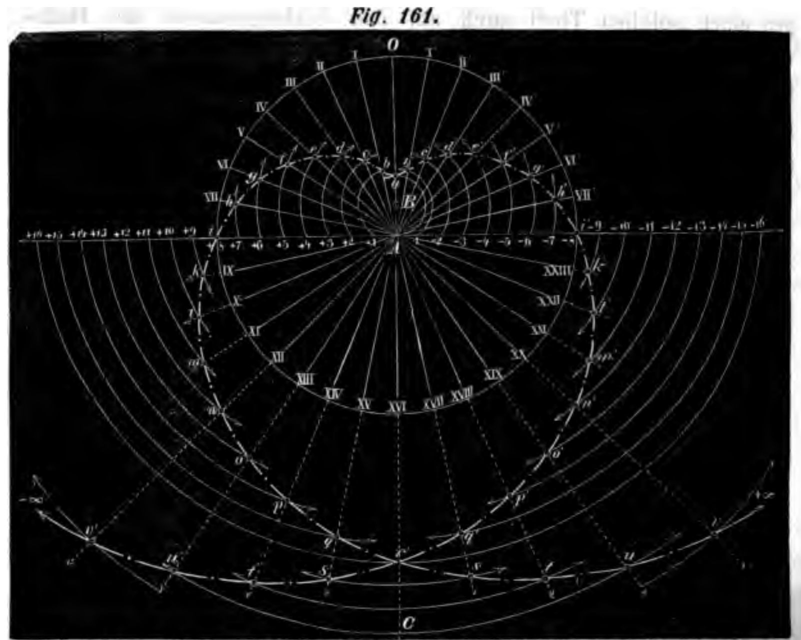
Theilen wir dessen Halbmesser *ai* in acht gleiche Theile und tragen einen solchen Theil auch auf den Verlängerungen der Halbmesser *ai* und *ai'* und zwar so oft auf, als wie viel Theile, der Halbmesser erhielt; theilen ferner den Quadranten ebenfalls in so viele gleiche Theile, als in wie viele der Halbmesser getheilt wurde, also den ganzen Kreis in viermal so viele gleiche Theile und beziffern die Theilungspunkte so wie die Figur zeigt. Nimmt man nun den Anfangspunkt der krummen Linie bei *a*, also im Mittelpunkte des Grundkreises an, durchschneidet aus *a* den Halbmesser *aI* mit *a* 1 in *b*, den Halbmesser *aII* mit *a* 2 in *c*, den Halbmesser *aIII* mit *a* 3 in *d* u. s. w., so erhält man, wie zuvor, *abcdefghi* als den einen Theil der krummen Polysectionslinie. Um nun diese fortzusetzen, verlängere man den Halbmesser *a* IX und durchschneide die Verlängerung desselben ebenfalls aus *a* und zwar mit *a* 9 bei *k*; die Verlängerung des Halbmessers *a X* mit *a* 10 bei *l*, die Verlängerung des Halbmessers *a* XI mit *a* 11 bei *m* u. s. w., so erhält man *abcd... i... n ..r... tuv* als die Fortsetzung der einen Hälfte dieser krummen Linie; die andere Hälfte, d. i. *a' b' c' d' ... i' ... n' ... r' t' u' v'* wird auf ähnliche Art erhalten, wie dies leicht aus der Figur zu ersehen ist. Indem man also den einen Theil als positiv annimmt, so kann der andere von *a* angefangen als negativ betrachtet werden. Der hier angenommene Anfangspunkt *a* ist aber zugleich ein Wendepunkt dieser krummen Linien.

Fasst man die Construction genau in's Auge, denkt sich die *Aa* und *aC* in's Unendliche verlängert und auf diesen den durch die Theilung des Halbmessers *ai* erhaltenen Theil so fort aufgetragen und jeden Halbmesser des getheilten Grundkreises ebenfalls in's Unendliche verlängert, zuletzt aus *a* entsprechend abgeschnitten, so wird man leicht einsehen, dass sich diese Linie um den Punkt *a* immer fort winden wird, welches in's Unendliche fortgesetzt werden kann. Hier hat jede Hälfte bis *D* eine halbe Windung, und bis *v* und *v'* hat man beiderseits $\frac{5}{8}$ Windungen. Die Fortsetzung stimmt vollkommen mit der Archimedischen Spirale überein.

Die zuvor ausgesprochene Behauptung, dass der angenommene Anfangspunkt *a* nicht etwa ein Durchgangspunkt dieser krummen Linie durch den Mittelpunkt, sondern nur ein Wendepunkt ist, kann durch geometrische Construction auf folgende Art nachge-

wiesen werden. Es sei aus *A* (Fig. 161) mit *A O* der Grundkreis

Fig. 161.



beschrieben und in 32 gleiche Theile getheilt, wodurch der Quadrant dieses Kreises 8 solche Theile erhält; es sei ferner der Halbmesser dieses Grundkreises, z. B. *Ai*, in eben so viele gleiche Theile getheilt, als in wie viele der Quadrant getheilt wurde und ein solcher Theil auch auf der Verlängerung aufgetragen. Nimmt man nun statt *A* den Punkt *B* auf *A O* als Mittelpunkt für Parallelkreise an, durchschneidet aus *B* mit *AB* den Halbmesser *AO* in *a*, so ist *a* der Anfangspunkt der Quadratrix; durchschneidet man aus *B* mit der Entfernung *B* 1 den nächstfolgenden Halbmesser *BI* in *b*, so ist *b* ein zweiter Punkt der Quadratrix; durchschneidet man eben so aus *B* mit der Entfernung *B* 2 den Halbmesser *A II* in *c*, so ist *c* ein dritter Punkt dieser krummen Linie. Fährt man nun so fort mit der Construction, so erhält man

a, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *k* . . . . . *r*, *s*, *t*, *u*, *v*

als Punkte für diese krumme Linie, und zwar für den positiven Theil derselben, wenn man *C O* als Axe annimmt. Die andere, negative Hälfte erhält man auf ähnliche Art, indem man auch auf dem Halbmesser *A i'* und dessen Verlängerung *i'* 16 gleiche Theilung macht und im Uebrigen wie zuvor verfährt.

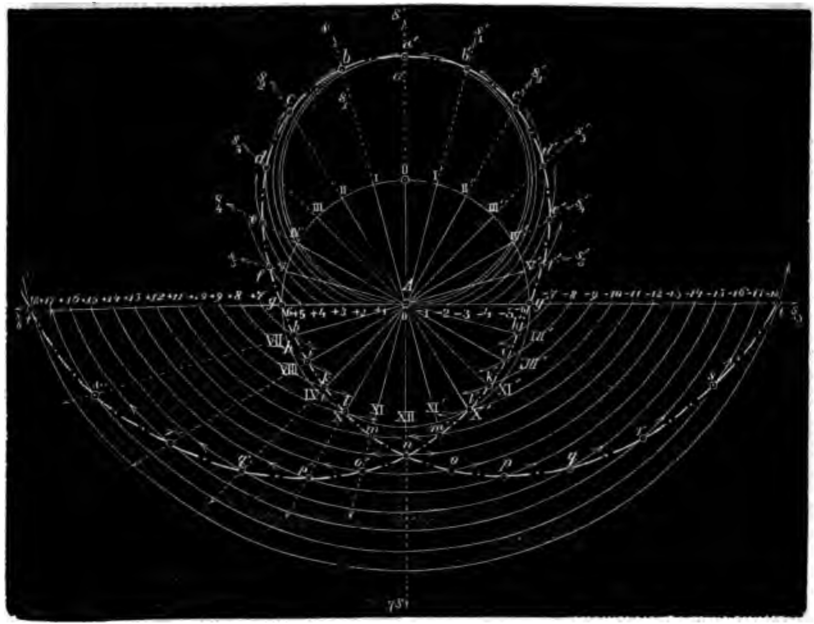
Wird diese Construction weiter fortgesetzt, so erhält man zwei entgegengesetzte parallel laufende Spiralen, welche, wie leicht begreiflich ist, in's Unendliche fortgesetzt werden können, weil kein Grund vorhanden ist, warum dies nicht sein soll; zumal da die Halbmesser, mit denen stufenweise die Verlängerungen der Halbmesser des Grundkreises geschnitten werden, immer grösser und grösser werden. Der Punkt *a* ist also ein Anfangspunkt, zugleich aber auch ein Wendepunkt und die krumme Linie macht bei *a* einen Einbug.

Es ist also, wie man sieht, die Herzform *a i m r m' i'* ein Kopf der zwei parallel laufenden Spiralen.

Dieser Kopf oder Anfang der Spirale wird sich desto mehr einem Kreisbogen nähern, je weiter man von dem Centrum des Grundkreises den Einsatz- oder Mittelpunkt für die Parallelkreise annimmt; und um dieses desto mehr zu veranschaulichen, wollen wir auch für diesen Fall eine Construction geben.

Es sei aus *A* mit *A O* (Fig. 162) ein Kreis beschrieben und

Fig. 162.



in 24 gleiche Theile getheilt; es sei ferner auch der Halbmesser *Ag* in eben so viele gleiche Theile getheilt, als wie viele Theile der

Quadrant des Grundkreises hat und auf den Verlängerungen der Halbmesser Ag und Ag' sei ein solcher Theil noch mehrmal aufgetragen. Nimmt man nun den Mittelpunkt für die Parallelkreise in der Peripherie des Grundkreises, also in O, an, und durchschneidet aus diesem den Strahl As bei a, den 1. Strahl As_1 bei b, den 2. Strahl As_2 bei c, den 3. Strahl As_3 bei d u. s. w., so erhält man a, b, c, d... bis t als Punkte der verlangten krummen Linie, welche bei a anfängt und durch den Kreis bei g und l durchgeht. Es schneidet also diese krumme Linie den Kreis zweimal und übergeht bei fortgesetzter Construction in eine parallel laufende Spirale, welches aus dem obangeführten Grunde geschieht.

Je weiter man nun von dem Mittelpunkte A den Einsatzpunkt für die Parallelkreise, hier den Punkt O annimmt, desto weiter wird auch der Anfangspunkt dieser Curve von A entfernt sein und desto näher wird der erste Durchschnittspunkt der beiden Aeste derselben, hier der Punkt n, dem Mittelpunkte A rücken.

Wird nun diese Construction fortgesetzt, so erhält man eine krumme Linie, welche bei a anfängt und in parallelen Windungen in's Unendliche fortläuft.

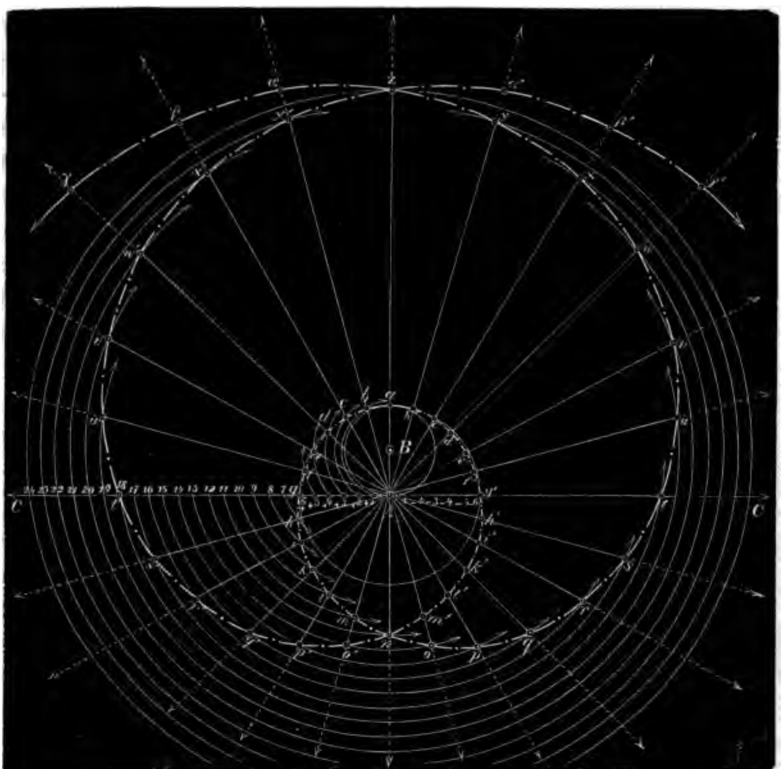
So wie hier die eine Hälfte construirt wurde, ebenso verfährt man auch bei der andern Hälfte, welche mit der ersten ganz symmetrisch ist, so dass man dann eine symmetrische Doppelspirale erhält. Den hier durch Construction bestimmten Theil wollen wir den Kopf dieser symetrischen Doppelspirale nennen. Dieser Kopf ist im ersten Falle, Fig. 160, eine Herzform mit einem scharfen Einbug bis zum Mittelpunkte, im zweiten Falle, Fig. 161, eben solche Form mit einem sanfteren Einbug, welcher nach und nach gestreckter erscheint, je weiter man den Einsatzpunkt vom Mittelpunkte annimmt, so dass er hier im 3. Falle Fig. 162 als eine Eiform mit der Spitze bei n erscheint. Da nun auf dem Halbmesser AO und dessen Verlängerung unzählig viele Punkte angenommen werden können, so folgt daraus, dass es unzählig viele solche symmetrische Doppelspirale als Polysectionscurven möglich und construirbar sind.

Von den unzähligen krummen Linien, die hier möglich sind, wollen wir noch auch eine vierte solche Polysectionscurve mit einer positiven und negativen ganzen Windung graphisch darstellen, welche desshalb interessant zu sein scheint, weil sie den Grund-

kreis, aus dem sie entwickelt wird, einmal berührt und zwar im Anfangspunkte, dann zweimal schneidet.

Es sei also in (Fig. 163) der Grundkreis aus A mit Aa be-

Fig. 163.



schrieben, ferner dessen Peripherie in 24 gleiche Theile getheilt; theilt man nun den Halbmesser ag des Grundkreises in eben so viele gleiche Theile, als der Quadrant desselben erhalten hat, und trägt den einen Theil des Halbmessers Ag auch auf dessen Verlängerung auf, so ist die Vorbereitung fertig. — Um nun die krumme Polysectionslinie so zu erhalten, dass sie den Grundkreis berührt, muss man den Halbmesser Aa in B halbiren. Ist dies geschehen, so beschreibe man aus B mit $AB = Ba$ über Aa als Durchmesser einen Halbkreis, wodurch a als Anfangspunkt der verlangten Linie erfolgt. Durchschneidet man ferner aus B mit der Strecke $B1$, den links nächstfolgenden Halbmesser bei b, so ist b der zweite Punkt dieser Linie. Durchschneidet man dann aus B mit der Strecke $B2$ den

links nächstfolgenden Halbmesser bei *c*, so ist *c* der dritte Punkt dieser krummen Linie. Ebenso bestimmt man aus *B* mit *B* 3 den Punkt *d*, mit *B* 4 den Punkt *e*, mit *B* 5 den Punkt *f* u. s. w. Da nun der Punkt 6 in der Peripherie liegt, so wird diese krumme Linie bei 6 durch den Kreis durchgehen müssen, und da jeder nächstfolgende Halbmesser als: *B* 7, *B* 8, *B* 9 . . . . grösser als der Halbmesser des Grundkreises ist (weil schon *B* 6 als die Hypothenuse des Dreieckes *ABg* grösser ist als der Halbmesser des Grundkreises), so werden die Halbmesser des Grundkreises erst in der Verlängerung geschnitten. Es wird also demzufolge diese krumme Linie immer weiter und weiter sich vom Mittelpunkte entfernen.

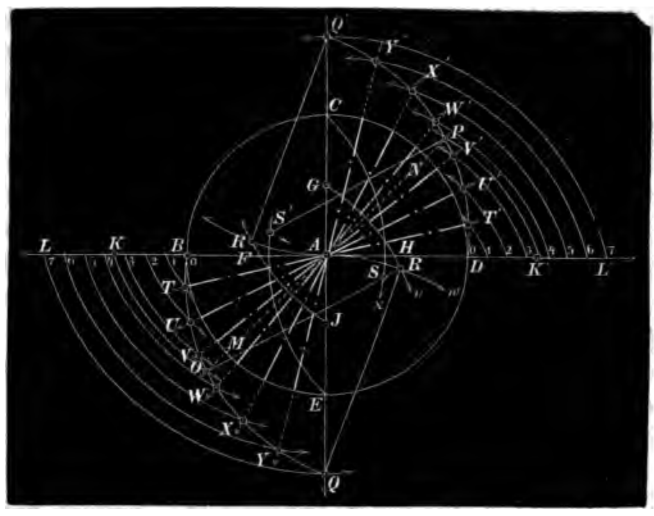
Eben so leicht ist es begreiflich, dass diese krumme Linie sich um den Kreis winden muss, weil die Einschnitte aus *B* auf den vom Mittelpunkte *A* des Grundkreises gezogenen Strahlen in der natürlichen Ordnung, wie sie in der Kreislinie auf einander folgen, gemacht werden.

Aus dieser Construction ist es ersichtlich, dass, wenn eine Windung dieser Curve gemacht ist, man damit sehr leicht den ganzen Kreis theilen kann. Hat man z. B. die Windung *abcde*..... *xyz* durch Construction gefunden, so durchschneide man aus *B* mit *Bz* die Verlängerung von *Ag* bei *C*, theile *AC* in so viele gleiche Theile als verlangt werden, hier in 24, durchschneide aus *B* mit *B* 1, *B* 2, *B* 3, *B* 4.... die Windung der Spirale in *b*, *c*, *d*, *e* . . . . *x*, *y*, *z*, und verbinde die so erhaltenen Punkte *b*, *c*, *d*, *e*, *f* . . . . *x*, *y*, *z* mit dem Mittelpunkte *A*, wodurch der gegebene Kreis in die verlangte Anzahl gleicher Theile getheilt wird.

Wie man aus der Construction sieht, ist dieses Verfahren nicht für jeden Quadranten leicht praktisch anzuwenden, weil die Durchschnitte der Parallelkreise mit der krummen Polysectionslinie zu schief ausfallen. Man kann diess höchstens in den drei ersten Quadranten anwenden, obschon auch hier, und zwar im ersten Quadranten die ersteren Durchschnittspunkte undeutlich sind, wie hier z. B. die Punkte *b* und *c*. Die zweite Viertelwindung, d. i. *ghiklmn* scheint am geeignetsten dazu zu sein, weil dabei die Durchschnittspunkte so ziemlich deutlich sind, und weil sich für diesen Theil der Curve sehr leicht ein Kreisbogen substituiren lässt. Letzteres soll desshalb angewendet werden, weil man durch Substitution viel eher zum Ziele kommt. Diess geschieht auf folgende Art:

Es sei aus A mit AB (Fig. 164) der zu theilende Kreis $BCDE$

Fig. 164.



beschrieben. Man ziehe die zwei Durchmesser BD und CE senkrecht auf einander, halbire AB in F, mache dann

$$AG = AH = AJ = BK = KL = \tfrac{1}{2} AB$$

und ziehe die Linie MN unter 45° gegen BD geneigt, d. h. man halbire den rechten Winkel $BAE = CAD = R$ durch MN.

Da nun nach der obigen Construction der Curve der Punkt B, d. i. der Endpunkt des Halbmessers AB dieser Curve angehört, so ist er schon ohne weitere Construction bestimmt. Um einen zweiten Punkt dieser Curve mathematisch richtig zu bestimmen, beschreibe man aus dem Halbirungspunkte G mit der Strecke GK einen Bogen, bis die Verlängerung der Geraden MN in O geschnitten ist, so hat man O als einen zweiten Punkt dieser Curve. Beschreibt man ferner aus G mit der Strecke GL ebenfalls einen Kreisbogen, aber so weit, dass die Verlängerung des Durchmessers CE in Q geschnitten wird, so folgt Q als ein dritter Punkt dieser Curve; und nun kann man durch diese drei Punkte zwei Kreisbögen legen, welche ziemlich genau für den betreffenden Theil der Curve substituirt ausfallen, sobald die Mittelpunkte gehörig gesucht worden sind.

Ein Versuch im grossen Massstabe zeigt, dass man am einfachsten auf die nachfolgende Art die Substitution machen kann:

Man beschreibe aus *O* mit der Strecke *OG* den Bogen *Gv* und durchschneide ihn mit demselben Halbmesser aus *Q* bei *R*, so ist *R* der Mittelpunkt für den Substitutionsbogen *OQ*. Der Mittelpunkt für den zweiten Bogen wird gefunden, indem man *O* und *Q* mit *R* durch Gerade verbindet, dann aus *B* mit der Strecke *BC* den Radius *OR* in S einschneidet.

Will man nun mittels dieses Substitutionsbogens den Quadranten *BEA* in eine beliebige Anzahl gleicher Theile theilen, z. B. in 7, so theile man die dem Quadranten entsprechende Verlängerung des Halbmessers *AB*, d. i. *BL*, in eben so viele gleiche Theile als es die verlangte Anzahl Einheiten hat, hier also in 7, beschreibe aus *G* mit *G*1, G2, *G*3, *G*4 .... Kreisbögen bis zum Substitutionsbogen *BOQ*, und führe zuletzt aus den so erfolgten Durchschnittspunkten nach dem Mittelpunkte die Geraden *AT*, *AU*, *AV* . . ., welche die verlangten Theillinien des Quadranten sein werden.

Obgleich nun diese Substitutionsmethode nur annähernd ist, so gewährt sie doch für den Praktiker gewisse Vortheile und insbesondere diese, dass man den Substitutionsbogen eher findet und reiner zeichnet, als die krumme Linie selbst.

Was nun diejenigen Fehler betrifft, die bei der Substitution begangen werden, so entgeht man diesen beim praktischen Zeichnen selbst dann nicht, wenn die krumme Linie auch wirklich construirt ist.

Um die Theilung mittels dieser Substitutions-Methode noch richtiger zu erhalten, ist es besser, die zwei Gegenquadranten zu theilen, welches wohl sehr leicht geschehen kann, wenn die Punkte für die Theilung des einen Quadranten gefunden sind, weil man sie nur zu übertragen braucht. Wie die Figur zeigt, sind hier die zwei Gegenquadranten *BAE* und *CAD* getheilt. Sind nun in diesen für die ersten Theile die zwei Hilfspunkte *T* und *T'* bestimmt, so muss die Gerade *TT'* gezogen durch den Mittelpunkt *A* des zu theilenden Kreises gehen. Ist es nicht der Fall, so muss man diese Theilungslinie so stellen, dass sie näherungsweise durch diese drei Punkte geht, und dass sich der Fehler ausgleicht und vermindert.

Ausserdem kann man nach dieser Methode auch so verfahren, dass man nur den einen Theil des Substitutionsbogens bestimmt und auch nur den einen Theil des Quadranten sucht und mittels diesen

Theiles durch Auftragen auf der Peripherie die übrigen Theilungspunkte findet.

Da jedoch das richtige Abnehmen des gefundenen Theiles selbst bei äusserst genauen Constructionen nur zur Seltenheit gehört, besonders bei der verlangten grossen Anzahl Theile, in welche der gegebene Kreis getheilt werden soll, so ist es viel besser, die Theilung des ganzen Quadranten nach dieser oder jener Methode vorzunehmen. Denn gesetzt den Fall, der gefundene und abgenommene Theil wäre nicht ganz genau in dem Kreisumfange enthalten, er wäre also zu gross oder zu klein, und zwar nur um eine geringe Differenz, so muss die Verbesserung gemacht werden; allein durch diese Verbesserung wird das Papier in der Umfangslinie so beschädigt, dass man viel grössere Fehler begeht, als es nach der Substitutions-Methode der Fall sein kann.

Nachdem es nun erwiesen ist, dass es unzählig viele krumme Linien gibt, wenn man den Einsatzpunkt nur auf dem vertikalen Durchmesser annehmen will, so folgt daraus, dass es auch unzählig viele solche Substitutions-Methoden geben kann. Unter allen diesen kann aber nur jene die vortheilhafteste sein, wo die aus dem Einsatzpunkte beschriebenen parallelen Kreisbögen die Halbmesser des Grundkreises oder deren Verlängerungen so deutlich als möglich, also etwa unter einem rechten Winkel schneiden.

Dies ist jedoch für den ganzen Quadranten nicht so leicht möglich, weil die Stellung der Halbmesser des Grundkreises sich ändert; und es wäre daher viel richtiger, die Substitution für einen Quadranten aus zwei Curven abzuleiten oder zusammen zu setzen.

Wir wollen dieses Verfahren jedoch damit schliessen, weil es den Zweck dieses Werkes übersteigen würde, alle diese Fälle hier durchzuführen, zumal da über die Systeme solcher Curven eigene Abhandlungen bereits druckfertig liegen und in Kürze veröffentlicht werden.

XIV. Polysections-Methode.

Diese Polysections-Methode ist eine Anwendung der in Figur 159 gegebenen Quadratrix auf die Theilung eines beliebigen Winkels. Sie ist unstreitig die einfachste und richtigste und kann

bei grossen Winkeln so gut wie bei den kleineren und kleinsten angewendet werden.

Die Theilung sehr kleiner Winkel kommt in der Praxis dann vor, wenn man ein Polygon von einer beträchtlichen Anzahl Seiten zu construiren hat, so z. B. bei einem 360-Eck, oder bei der Theilung des Kreises in 360 gleiche Theile, wie auch bei verschiedenen andern Polygonen. Man pflegt hierbei zuerst solches Polygon zu zeichnen, welches man geometrisch richtig erhalten kann und sucht dann aus diesem durch weitere Theilung das Verlangte zu erhalten.

Will man also z. B. ein 360-Eck haben, so muss man den Kreis zuerst in 4, dann in 8, und jedes Achtel in 3 gleiche Theile theilen, welches sich auch ganz genau geometrisch ausführen lässt. Dadurch bekommt man also ein 24-Eck. Um nun aus diesem ein 360-Eck zu erhalten, muss man den 24. Theil des Kreises oder den Bogen und Winkel des 24-Ecks in 15 gleiche Theile theilen.

Da nun 15 = 3 × 5 ist, so muss man noch die Drei- und Fünftheilung vornehmen, welche sich nach der Methode der alten griechischen Mathematiker geometrisch nicht ausführen lässt. Daraus sieht man nun sehr leicht die Wichtigkeit sowohl der Trisection als auch der allgemeinen Methode der Polysection eines jeden beliebigen Winkels ein; denn so wie man hier bei dem 360-Ecke auf die Zahlen 3 und 5 kommt, eben so kann man auch auf die Zahlen 7, 11, 13 u. s. w. kommen, wo uns alle vorhandenen geometrischen Lehrsätze verlassen und statt der geometrischen Construction die Probir- oder Versuchskunst angewendet werden muss.

Diess geschieht jedoch nicht nur in diesem, sondern auch in andern Fällen, wo man die geometrische Construction anwenden könnte. Der Grund dessen liegt jedoch nur in der geringen Bildung der Zeichner selbst und in der Einbildung, dass sie mit dem Versuchen eher zum Ziele kommen als mit Anwendung der geometrischen Lehrsätze, wohl aber auch darin, dass man die geometrischen Constructionen nur zu bald aus dem Gedächtnisse verliert. Man behält strengstens die Hauptconstructionen im Gedächtnisse und probirt das Uebrige so gut als es geht, unbekümmert, ob die zuerst gemachte Zeichnung dadurch leidet oder nicht.

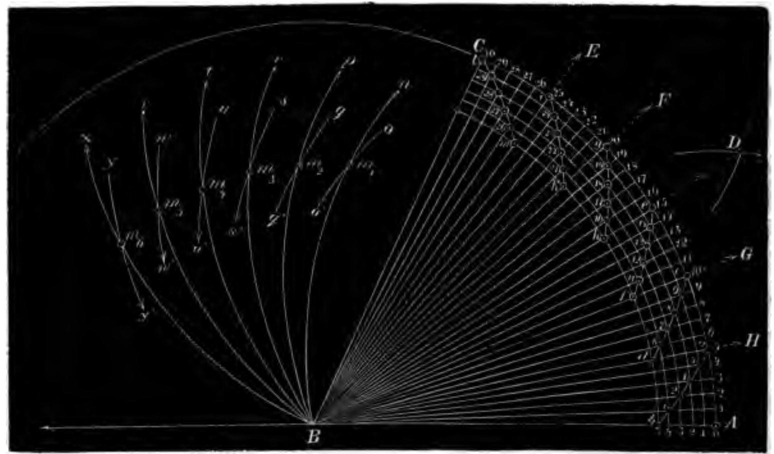
Da es jedoch erwiesen ist, dass die Richtigkeit und Reinheit der gemachten Zeichnung nur von der guten und vortheilhaften

geometrischen oder einer annähernden Methode abhängt, so ist es auch äusserst wichtig, die geometrische Construction der Theilung der Winkel bis in's Kleinste nach einer vortheilhaften Methode durchgeführt zu wissen, wenn gleich diess auch mittels krummer Linien oder durch deren Substitution ausgeführt wird.

Nachdem hier also eine Menge von Constructionen über die Bi-, Tri-, Quadri- und Polysection aufgestellt wurden, soll noch auch eine äusserst vortheilhafte Methode über die Polysection der sehr kleinen Winkel folgen.

Um nun ein allgemeines Beispiel zu haben, nehmen wir den Winkel ABC (Fig. 165) als den zu theilenden Winkel an, welcher

Fig. 165.



z. B. in 30 gleiche Theile getheilt werden soll. Zerlegt man 30 in Faktoren, so hat man $30 = 6 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Diess zeigt uns also, dass wir den gegebenen Winkel zuerst halbiren, dann jede Hälfte in drei und jedes Drittel der zwei Hälften oder jedes Sechstel des Ganzen in fünf gleiche Theile theilen müssen.

Man halbire daher den Winkel ABC durch BD, wodurch also

$$\text{arc } Ae = Ce = \tfrac{1}{2}AC \text{ und } \measuredangle\, ABe = CBe = \tfrac{1}{2}ABC$$

erfolgt; nun theile man jede Hälfte nach irgend einer der hier aufgestellten Methoden in drei gleiche Theile, wodurch man

$$\text{arc } Aa = ac = ce = eg = gi = iC = \tfrac{1}{6}AC$$

und $\measuredangle\, ABa = aBc = cBe = eBg = gBi = iBC = \tfrac{1}{6}ABC$

erhält. Um nun jedes Sechstel in fünf gleiche Theile zu theilen, nehme man auf dem Schenkel AB eine beliebige Einheit $A1$ an,

trage sie auf AB von A aus fünfmal auf und beschreibe aus dem Scheitelpunkte B mit $B1$, $B2$, $B3$, $B4$, $B5$ parallele Kreisbögen zu AC; fasst man zuletzt den Halbmesser AB in Zirkel und beschreibt damit aus a den Bogen Bn, so wie aus b den Bogen oo', und aus dem so erfolgten Durchschnittspunkte m, den Transversalbogen ab, so schneidet dieser die aus B beschriebenen Parallelkreise in Punkten 1, 2, 3, 4, durch welche aus B die Halbmesser $B1$, $B2$, $B3$, $B4$ gezogen, die Theilung des Bogens Aa und des ihm entsprechenden Winkels ABa gibt; so dass

$$\text{arc } A1 = 1,\ 2 = 2,\ 3 = 3,\ 4 = 4,\ 5 = \tfrac{1}{5} Aa = \tfrac{1}{30} AC$$

und $\measuredangle AB1 = 1B2 = 2B3 = 3B4 = 4B5 = \frac{1}{5} ABa = \frac{1}{30} ABC$

ist. Macht man nun dieselbe Operation weiter auch bei jedem andern Sechstel, indem man aus c und d mit $AB = BC$ den Mittelpunkt m_2 bestimmt und aus diesem den Transversalbogen cd beschreibt; ferner aus e und f mit demselben Halbmesser den Mittelpunkt m_3 bestimmt und aus diesem den Transversalbogen ef beschreibt u. s. w., so hat man für jedes Sechstel einen Transversalbogen, welcher jeder die Parallelkreise schneidet und auf denselben die Durchschnittspunkte als Punkte für die verlangte Theilung gibt.

Man hat also:

auf arc ab	aus m_1	beschrieben,	die	Theilpunkte	1,	2,	3,	4,	5,
„ „ cd	„ m_2	„	„	„	6,	7,	8,	9,	10,
„ „ ef	„ m_3	„	„	„	11,	12,	13,	14,	15,
„ „ gh	„ m_4	„	„	„	16,	17,	18,	19,	20,
„ „ ik	„ m_5	„	„	„	21,	22,	23,	24,	25,
„ „ lm	„ m_6	„	„	„	26,	27,	28,	29,	30,

durch welche Punkte aus dem Scheitelpunkte B die Strahlen gezogen, die verlangte Theilung des gegebenen Bogens und des ihm entsprechenden Winkels gibt.

In der Praxis kann man sich indess damit begnügen, dass man nur von dem ersten Sechstel die Theilung auf die obgesagte Art sucht, sodann den so erfolgten Theil, d. i. $\frac{1}{5}$ des Bogens Aa als $\frac{1}{30}$ des Bogens AC auf diesem aufträgt. Das Abnehmen des gefundenen Theiles ist jedoch eine so heikliche Sache, dass man dies selbst dann, wenn die Theilung des ersten Sechstels äusserst genau gemacht wäre, nur selten genau trifft. Um dies dennoch desto leichter zu bewerkstelligen, muss man den abgenommenen Theil auf dem getheilten Bogen auftragen und sehen, ob die Spitze des Zirkels mit den schon gefundenen

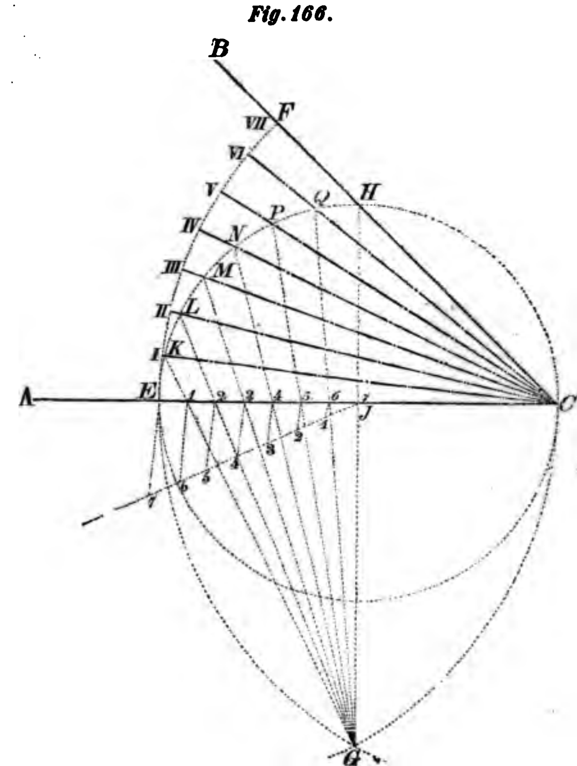
Punkten genau zusammenfällt. Allein auch dieses ist nicht immer als richtig anzunehmen, denn bei der grossen Anzahl Theile wird der Fehler, den man begeht, manchmal erst bei den letzten Theilpunkten bemerkbar. Es ist daher die obige Theilung für die meisten Fälle viel praktischer und richtiger, als das Probiren.

Was die Richtigkeit der Theile betrifft, so sind diejenigen ersten Theile eines jeden Sechstels am richtigsten, welche an den Punkten *a*, *c*, *e*, *g*, *i* und *C* anliegen; allein auch die andern Theile sind nach dieser Substitutionsmethode so richtig, als man sich dies nur wünschen kann, ganz gewiss aber praktisch genau.

XV. Allgemeine Methode der Polysection.

Die nachfolgende Methode ist, von allen den angeführten, die vorzüglichste. Sie ist von einem Systeme der von mir neu erfundenen Polysectionslinien abgeleitet. Die Basis oder der Kopf mancher dieser Linien ist halbkreisförmig, welches ein Mittel an die Hand gibt, diese zur Polysection mit Vortheil zu benützen.

Fig. 166.



Es sei *ACF* (Fig. 166) der zu theilende Winkel und *EF* der ihm entsprechende Bogen. Wird der Schenkel *CE* bei *J* halbirt, aus diesem Punkte mit dem Halbmesser *CJ* ein Halbkreis beschrieben, so ist dieser der Polysectionshalbkreis.

Um nun mittels dieses Halbkreises den gegebenen Bogen und Winkel in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, muss noch ausser-

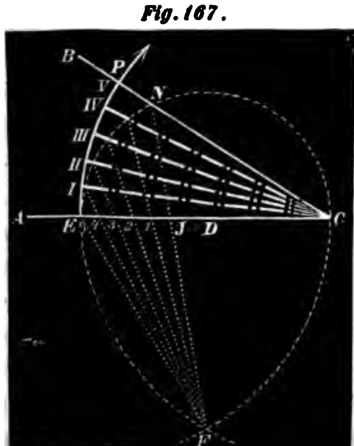
dem ein Polysectionspunkt, hier der Punkt *G* bestimmt werden, welcher dadurch gefunden wird, indem man aus *C* und *E* mit dem Halbmesser gleich *CE* Bögen beschreibt, welche sich, hier bei *G*, schneiden.

Wird alsdann der Halbmesser *EJ* in so viele gleiche Theile getheilt, als in wie viele der Winkel getheilt werden soll (hier in 7), ferner aus dem Punkte *G* durch jeden Theilungspunkt bis zu der Peripherie des Polysectionshalbkreises *EHC* eine Gerade geführt, endlich durch jeden so erhaltenen Punkt *K, L, M, N, P, Q* aus dem Punkte *G* eine Gerade gezogen, so wird dadurch sowohl der gegebene Bogen als auch der ihm entsprechende Winkel in die verlangte Anzahl gleicher Theile getheilt, hier in sieben, und zwar mit einer grossen Genauigkeit.

Um nicht erst eine Eintheilung auf dem Schenkel machen zu müssen, verfahre man lieber auf folgende Art: Man trage auf dem Schenkel des gegebenen Winkels, hier auf *AC* von dem Scheitelpunkte *C* aus eine beliebige Einheit, doppelt so oft, als wie viele Theile verlangt werden, hier also 14mal auf, markire den siebenten Theilungspunkt, so wie alle nachfolgenden Punkte und beschreibe erst dann aus dem siebenten Theilungspunkte als dem Mittelpunkte den Halbkreis als Polysectionsbogen und auch den Bogen des gegebenen Winkels. Im Uebrigen verfahre man wie zuvor.

In der vorhergehenden Figur hat der eine Schenkel des gegebenen Winkels den Polysectionshalbkreis gerade so geschnitten, dass der Halbkreis dadurch halbirt wurde, somit war der Halbmesser des Polysectionsbogens einzutheilen. Nehmen wir an, es sei *ACB* (Fig. 167) der zu theilende Winkel und *EP* der ihm entsprechende Bogen. Wird $ED = CD$ gemacht und aus *D* ein Halbkreis beschrieben, so schneidet dieser den Schenkel *BC* bei *N*; wird nun *N* mit dem Sectionspunkte *F* durch eine Gerade verbunden, so schneidet diese den Halbmesser *ED* bei *J*.

Fig. 167.



Soll nun der Winkel *ACB* z. B. in fünf gleiche Theile getheilt wer-

den, so theile man das Stück EJ in fünf gleiche Theile, führe aus dem Punkte F durch jeden Theilungspunkt der EJ Gerade bis zu dem Polysectionshalbkreise ENC, und ziehe dann aus dem Scheitelpunkte C durch die auf dem Bogen EN erhaltenen Durchschnittspunkte bis zu dem Bogen EP Gerade, wodurch der gegebene Winkel ACB, so wie der ihm entsprechende Bogen EP in fünf gleiche Theile getheilt wird, so dass

$$\text{arc } EI = I\,II = II\,III = \ldots = \tfrac{1}{5} EP$$

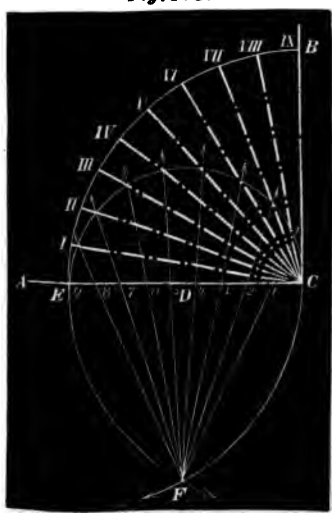
und $$\measuredangle\, ECI = ICII = IICIII = \ldots = \tfrac{1}{5} ECP$$

erfolgt.

Wie nun dieser Winkel in fünf gleiche Theile getheilt wurde, eben so kann man auch jeden andern Winkel, der zwischen 0 und 90° ist, mittels des ober dem Schenkel EC beschriebenen Halbkreises in eine beliebige Anzahl gleicher Theile theilen und es muss jedesmal das durch die Transversale FN abgeschnittene Stück EJ getheilt werden. Ist jedoch der zu theilende Winkel ein rechter, so wird statt der Theilung der EJ, welche in diesem Falle $= EC$ erfolgt, lieber das Auftragen einer beliebigen Einheit vorgenommen.

Es sei also der Winkel $ACB = 90°$ (Fig. 168) in 9 gleiche Theile zu theilen; man mache $DE = CD$, beschreibe aus D über CE einen Halbkreis, theile CE in 9 gleiche Theile, bestimme mit CE als Halbmesser, wie zuvor, den Punkt F, führe aus diesem durch jeden Theilungspunkt der CE eine Gerade bis zu dem über CE beschriebenen Halbkreise und durch die so erfolgten Punkte im Halbkreise führe man aus C Gerade, bis sie den Bogen EB schneiden, wodurch also der Winkel und Bogen in die verlangte Anzahl gleicher Theile, hier in 9, getheilt wird.

Fig. 168.



Es ist also hier:

$$\text{arc } EI = I\,II = II\,III = \ldots\ldots = \tfrac{1}{9} BE$$

und $$\measuredangle\, ECI = ICII = IICIII = \ldots\ldots = \tfrac{1}{9} BCE.$$

Bei dieser Methode ist es wohl besser, nur einen Theil auf dem zu theilenden Bogen zu bestimmen, die übrigen Punkte aber durch das Auftragen des gefundenen Theiles zu finden; denn trotzdem, dass dieses Verfahren sehr genau ist, kann man nicht jedesmal durch die, diesem Verfahren zu Grunde liegende geometrische Construction die Theilungspunkte des gegebenen Bogens genau bestimmen.

Von den Sectionscurven, aus denen dieses Verfahren abgeleitet wurde, geht jede genau durch den Mittelpunkt, so wie beide Zweige durch den Sectionspunkt in's Unendliche fort.

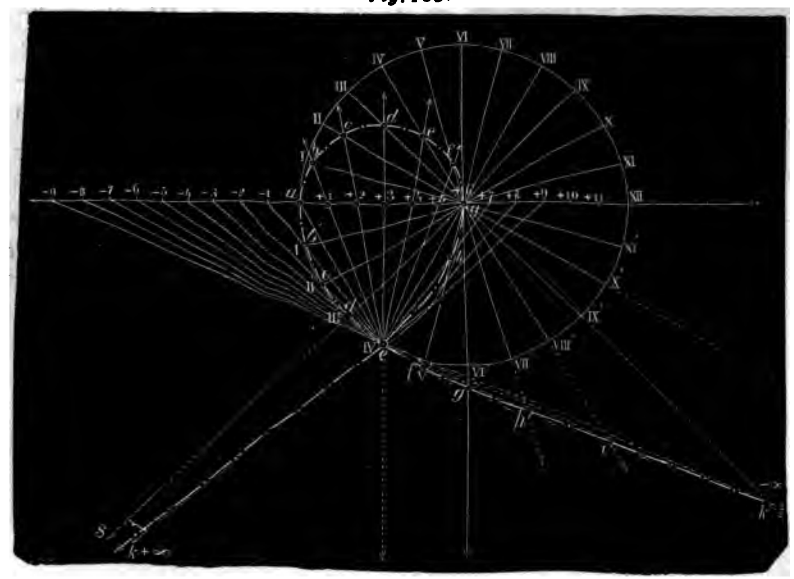
Der substituirte Halbkreis stimmt mit dem Kopfe der eigentlichen Sectionscurve ziemlich genau überein, und es ist auch nur der Kopf dieser krummen Linie für die Polysection verwendbar.

Es ist wohl leicht zu begreifen, dass man den Sectionspunkt wo immer annehmen kann; und da es unzählig viele Punkte unter dem horizontalen Durchmesser des Grundkreises gibt, so folgt daraus, dass es unzählig viele solche Polysectionslinien geben muss.

Von diesen unzählig vielen Linien wollen wir nur drei hervorheben. Die erste dieser Linien soll diejenige sein, für deren Kopf man einen Halbkreis substituiren kann, woraus sich das obige Verfahren der Polysection mittels eines über dem Halbmesser des Grundkreises beschriebenen Halbkreises ergibt.

Es sei nun in (Fig. 169) aus g mit dem Halbmesser ag der

Fig. 169.



Grundkreis beschrieben. Theilen wir die Peripherie dieses Kreises in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, hier in 24, und dessen Durchmesser in so viele gleiche Theile als die halbe Peripherie bei der angenommenen Theilung erhalten hat, und tragen ferner einen solchen Theil auch auf den Verlängerungen des getheilten Durchmessers mehrmals auf. Um den Sectionspunkt für diese krumme Linie so zu erhalten, dass der Kopf dieser Curve mit dem Halbkreise substituirbar ist, durchschneide man den Grundkreis, wie zuvor, aus *a* mit dem Halbmesser *ag* bei *e'*.

Beziffert man nun die Theilpunkte des Durchmessers *a XII* von *a* angefangen, mit den Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung, so ist *a* schon als ein Punkt der fraglichen Curve anzusehen. Führt man ferner aus *e'* durch den ersten Theilungspunkt des Durchmessers *a XII* eine Transversale, bis der Halbmesser *g I* in *b* geschnitten wird, so ist *b* ein zweiter Punkt dieser Linie. Der dritte Punkt, d. i. *c*, wird erhalten, indem man aus *e'* durch den zweiten Theilpunkt des Durchmessers *a XII* eine Transversale zieht, bis der Halbmesser *g II* geschnitten ist u. s. w.

Indem man also so weiter fortfährt, erhält man die Punkte *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i* für den einen Theil dieser Curve.

Es ist wohl leicht einzusehen, dass diese Linie durch den Mittelpunkt des Grundkreises gehen muss, welches aber dann stattfindet, wenn diejenige Transversale aus dem Sectionspunkte gezogen wird, welche durch den Mittelpunkt geht. Hier geht die 6. Transversale durch den Mittelpunkt und schneidet den 6. Halbmesser, d. i. *gVI*, im Mittelpunkte selbst, also in *g*.

Bei weiterer Fortsetzung dieser Construction kann man hier bei der angenommenen Theilung des Grundkreises nur noch zwei Punkte der Curve bestimmen, wo der zweite in der Peripherie des Grundkreises erhalten wird. Der dritte Punkt, d. i. *k*, ist hier in der Richtung der *gs* nur angedeutet. Wollte man noch einen vierten suchen, so bemerkt man sogleich, dass es zur Unmöglichkeit gehört, d. h. es gibt für diese Eintheilung keinen Punkt der Curve mehr, und es wird die Asymptote derselben zwischen dem Halbmesser *g II'* und *gIII'* liegen, weil der Halbmesser *g III'* mit der ihm entsprechenden Transversalen noch einen Punkt der Curve gibt und mittels *g II'* man keinen solchen mehr erhalten kann.

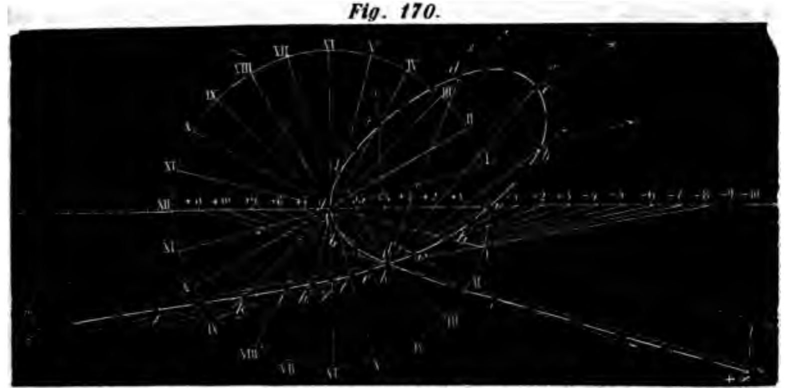
Nimmt man hingegen, von dem Punkte *a* nach links gezählt,

die Theilpunkte der Verlängerung des Durchmessers negativ an und verbindet e' mit -1, dann mit -2, ferner mit -3 u. s. w., so erhält man b', c', d', e' u. s. w. als Punkte für den andern Theil derselben Curve, welcher Theil bei e' durch die Peripherie des Kreises geht und dann in's Unendliche fortläuft.

Auch für diesen Theil erhält man eine Asymptote, so wie für den ersteren, weil auch hier eine Transversale mit dem ihr entsprechenden Halbmesser parallel sich stellen lässt.

Nimmt man den Sectionspunkt innerhalb der Peripherie des Grundkreises, hier z. B. (in Fig. 170) bei k an, so erhält man

Fig. 170.



ebenfalls eine krumme nach zwei Richtungen in's Unendliche fortlaufende Linie. Diese geht durch den Mittelpunkt des Grundkreises und schneidet denselben 4mal; beide Aeste durchschneiden sich im Sectionspunkte und dann geht jeder von ihnen in's Unendliche fort.

Die Construction dieser Curve wird auf ähnliche Art, wie die der vorhergehenden vorgenommen. Nimmt man nämlich im Endpunkte des Halbmessers ag, d. i. in a den Anfangspunkt an und zieht aus k durch $+1$ eine Transversale, bis der Halbmesser gI in b geschnitten ist, so folgt b als ein zweiter Punkt dieser Curve; zieht man aus k durch $+2$ ebenfalls eine Transversale, bis die Verlängerung des Halbmessers gII geschnitten ist, so erhält man c als einen dritten Punkt dieser krummen Linie; ebenso findet man die nächstfolgenden Punkte d, e, f, g, h, ... Bei Fortsetzung dieser Construction wird man leicht finden, dass diese krumme Linie durch den Mittelpunkt bei g, so wie durch den Sectionspunkt k durchgehen muss.

Ebenso werden auch die entgegengesetzten Punkte b', c', d', e'...

gefunden, indem man die negativen Punkte auf der Verlängerung des Halbmessers *ag* als Hilfspunkte benützt, von diesen durch den Sectionspunkt Transversale zieht, bis die der Ordnung nach auf einander folgenden Halbmesser des Grundkreises geschnitten werden.

Wie man aus der Construction sieht, ist der Kopf dieser krummen Linie, hier *abcdefg* eine anwendbare Quadratrix; weil mittels derselben die Punkte für die Theilung des ganzen Quadranten sich sehr leicht, und zwar ziemlich scharf und deutlich bestimmen lassen. Die übrigen beiden Theile dieser Curve sind nicht so leicht zu benützen, weil die schiefen Schnitte bedeutende Fehler veranlassen, obschon die Curve mathematisch richtig bestimmt wird.

Ausser den zwei hier angegebenen Curven gibt es unter den unzählig vielen dieser Art auch solche, welche mit einem Theile des Grundkreises übereinstimmen, d. h. zum Theile mit einander zusammen fallen.

Für die geometrische Theilung ist also nur eine solche Curve am geeignetsten, welche mit demjenigen, wenn auch geringem Theile zusammenfällt, der sich an dem Endpunkte des horizontalen Durchmessers befindet. Um dies auszumitteln, werden wir hier so verfahren, dass wir den zu suchenden Theil des Winkels als bekannt annehmen und dann den Sectionspunkt suchen.

Es sei aus *A* mit *AB* (Fig. 171) der Grundkreis beschrieben.

Fig. 171.

Theilt man den Halbmesser *AB*, so wie den Quadranten *BD* in drei gleiche Theile, so, dass $BH = HI = ID$ ist, und zieht aus *H* durch den Punkt *G* (als den ersten Theilungspunkt der *AB*) eine Gerade, soweit bis die Verlängerung des verticalen Durchmessers *DE* in *F* geschnitten wird, so ist *F* der verlangte Sectionspunkt.

Nimmt man nun diese Construction umgekehrt, so handelt es sich insbesondere darum, wie gross das Stück *EF* ist.

Setzt man nun den Winkel $AFG = \alpha$, $AGF = \beta$, $AGH = \gamma$, $AHG = \delta$ und nimmt ferner den Winkel $BAH = x$ als bekannt, also hier $x = 30^0$ an, weil $90 : 8 = 30^0$ wirklich ist, so kann man sehr leicht den Winkel δ und γ, somit auch den Winkel β für das Dreieck *AFG* und aus diesem die Seite *AF*, somit auch das Stück *EF* finden.

Betrachtet man also zuerst das Dreieck AGH und setzt in diesem die Seite $AH = a$, $AG = b$, so hat man:

$$\text{tang}\,\frac{\delta-\gamma}{2} = \text{tang}\,\frac{\delta+\gamma}{2}\cdot\frac{a-b}{a+b};$$

da nun $a = 1,$

und $b = 0{\cdot}6666666$ ist,

so folgt $a + b = 1{\cdot}6666666$

und $a - b = 0{\cdot}3333334;$

da ferner $\alpha = 30$ ist, so hat man

$$\gamma + \delta = 180^0 - \alpha = 180^0 - 30^0 = 150^0,$$

daher $\frac{\gamma+\delta}{2} = 150 : 2 = 75^0;$

man hat somit durch gehörige Substitution in die obige Formel:

$$\text{tang}\,\frac{\gamma-\delta}{2} = \text{tang}\ 75^0\ .\ \frac{0{\cdot}3333334}{1{\cdot}6666666};$$

und

$$\log\text{tang}\,\frac{\gamma-\delta}{2} = \log\text{tang}\,75^0 + \log 0{\cdot}3333334 - \log 1{\cdot}6666666;$$

nun ist

$\log\text{tang}\ 75^0 = 10{\cdot}5719475 - 10$
und $\log 0{\cdot}3333334 = 0{\cdot}5228788 - 1$, welches addirt,
gibt: $10{\cdot}0948263 - 10,$

wovon

$\log 1{\cdot}6666666 = 0{\cdot}2218488$ abgezogen,

gibt: $\log\text{tang}\,\frac{\gamma-\delta}{2} = 9{\cdot}8729775 - 10;$

diesem entspricht: $36^0\ 44'\ 16{\cdot}9'' = \frac{\gamma-\delta}{2}.$

Es ist somit $\gamma - \delta = 72^0\ 28'\ 33{\cdot}8$

und da $\gamma + \delta = 150^0\ 0'\ 0''$ ist,

so folgt $2\gamma = 222^0\ 28'\ 33{\cdot}8'';$

daher $\gamma = 111^0\ 14'\ 16{\cdot}9'',$

folglich $\beta = 180^0 - \gamma = 68^0\ 35'\ 43''.$

Da nun β bekannt ist, so kann man jetzt in dem Dreiecke AGF die Seite AF berechnen und aus dieser auch das Stück EF finden; denn es ist

$$AF = \frac{AG}{\text{cotang}\,\beta};$$

daher durch Substitution der obgefundenen Werthe

$$AF = \frac{0{\cdot}6666666}{\text{cotang}\ 68^0\ 35'\ 43''}$$

und log AF = log 0·6666666 — log cotang 68° 85′ 43″;
nun ist log 0·6666666 = 9·8239087 — 10
und log cotang 68° 36′ 43″ = 9·5895463 — 10, welches abgezogen, gibt: 0·2343624;
diesem entspricht: 1·715388 = AF.
Da aber AE = 1 = dem Halbmesser ist,
so folgt $AF - AE = EF$ = 0·715388.

Wollte man also nach dieser Art einen Quadranten in drei gleiche Theile theilen, so müsste die Verlängerung des Durchmessers DE = 0·7 gemacht werden; das Uebrige wie zuvor.

Denkt man sich nun in der obigen Figur den Quadranten BD nach und nach in 4, 5, 6, 7 . . . . und allgemein in n gleiche Theile getheilt, hierauf aus dem ersten Theilungspunkte des Viertelbogens BD durch den ersten Theilungspunkt des Halbmessers AB (von B aus gerechnet) eine Gerade gezogen, bis die Verlängerung des Durchmessers DE geschnitten wird, so lässt sich für jede solche Theilung des Quadranten die Verlängerung des Halbmessers AE, d. h. das Stück EF, berechnen. Und geschieht dies auch wirklich auf die obangezeigte Art, so findet man Folgendes:

Für die	3	Theilung	ist	AF = 1·715388;	daher	EF = 0·715388,
„	4	„	„	AF = 1·650642	„	EF = 0·650642,
„	5	„	„	AF = 1·636564	„	EF = 0·636564,
„	6	„	„	AF = 1·626657	„	EF = 0·626657,
„	7	„	„	AF = 1·619350	„	EF = 0·619350,
„	8	„	„	AF = 1 613656	„	EF = 0·613656,
„	9	„	„	AF = 1·609011	„	EF = 0·609011,
„	10	„	„	AF = 1·604506	„	EF = 0·604506,
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
„	15	„	„	AF = 1·594413	„	EF = 0·594413,
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
„	20	„	„	AF = 1·595316	„	EF = 0·595316,
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
„	30	„	„	AF = 1·582815	„	EF = 0·582815,
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Aus dieser berechneten schematischen Darstellung des Stückes EF sieht man wohl leicht ein, dass man bei unsern gewöhnlichen Contructionen nur die erste Decimalstelle benützen und die übrigen ohne erheblichen Nachtheil vernachlässigen kann; denn die zweite

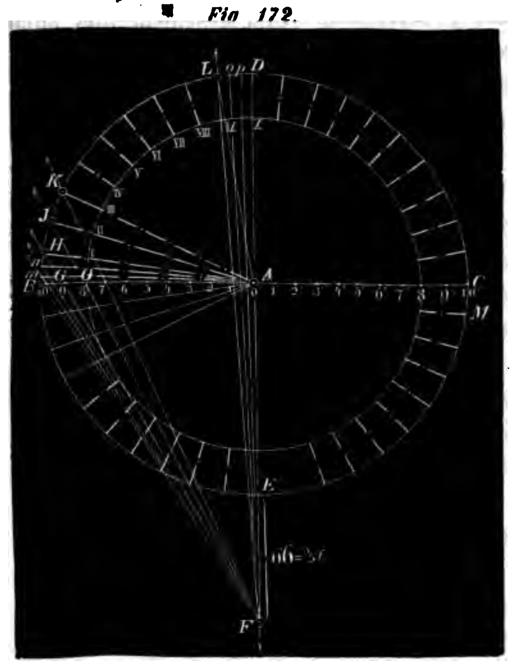
Decimalziffer hat bei den ersteren Theilungen von der 4. bis zur 10. Theilung genommen, keinen so grossen Einfluss, so dass man $0 \cdot 6 = \frac{3}{5}$ für *EF* annehmen kann. Von der 10. bis zur 30. Theilung kann man eben so bei Vernachlässigung der übrigen Ziffern ohne erheblichen Fehler die zweite Decimalstelle, d. i. 0·5 um 1 erhöhen, weil die zweite Decimalstelle 9 oder 8 ist.

Man hat also hier für alle Theilungen von der 4. bis zur 30. Theilung annäherungsweise $EF = 0 \cdot 6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ des Halbmessers des Grundkreises.

Will man jedoch mittels des berechneten *EF* noch richtiger arbeiten, so muss man die 3 ersten Decimalstellen benützen, in welchem Falle man aber einen tausendtheiligen Massstab braucht; dann wird man die Theilungen gewiss mit einer sehr grossen Genauigkeit, ja man könnte sagen auf Sekunden genau vornehmen.

Diese Constructionsweise dient auser den obigen Theilungen auch noch dazu, um feinere Theilungen zu machen. Hat man z.B. in (Fig. 172) den Quadranten *BD* in 10 gleiche Theile mittels des Sectionspunktes *F* getheilt, so dass arc $BH = \frac{1}{10} BD$ und $\measuredangle BAH = \frac{1}{10} BAD$ ist, so kann man den Bogen *BH* mittels der Transversalen aus demselben Punkte *F* in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, hier in 3, theilen, indem man wie hier das Stück *BG* in 3 gleiche Theile theilt und durch die so erhaltenen Theilpunkte aus *F* die Transversalen *Fm*, *Fn* zieht, wodurch

Fig. 172.



arc $Bm = mn = nH = \frac{1}{3} BH$ und $BAm = mAn = nAH = \frac{1}{3} BAH$ erfolgt. Denn die krumme Sectionslinie stimmt an dieser Stelle mit dem Kreisbogen sehr genau überein.

Indem man nun $\frac{1}{10}$ des Quadranten gefunden, diesen auf der Peripherie aufgetragen, also den ganzen Kreis in 40 gleiche Theile getheilt, ferner den Bogen *B H* in 3 gleiche Theile getheilt und auch diesen auf der Peripherie aufgetragen hat, so erhält man die Theilung des ganzen Kreises in 120 gleiche Theile.

Durch Dreitheilung eines solchen Theiles erhält man die Theilung des Kreises in 360 gleiche Theile, also von Grad zu Grad.

Bei dieser Methode hat man noch insbesondere darauf zu sehen, dass man den gefundenen Theil auch richtig abnimmt, weil im entgegengesetzten Falle der Fehler sich bedeutend vervielfacht. Um jedoch auch dies zu vermeiden, muss man den Durchmesser, auf welchem der Sectionspunkt bestimmt wird, beiderseits verlängern, zwei Sectionspunkte bestimmen und auch auf der entgegengesetzten Seite den verlangten Theil des Quadranten, hier den Theil *CM*, suchen.

Ist nun auch dieser gefunden worden, so verbindet man *H* mit *M* durch eine Gerade, welche, sobald die Punkte *H* und *M* richtig sind, durch den Mittelpunkt gehen muss, wo nicht, so nimmt man mittels der Drehung dieser Linie um den Mittelpunkt *A* die Correctur vor.

XVI. Polysections-Methode.

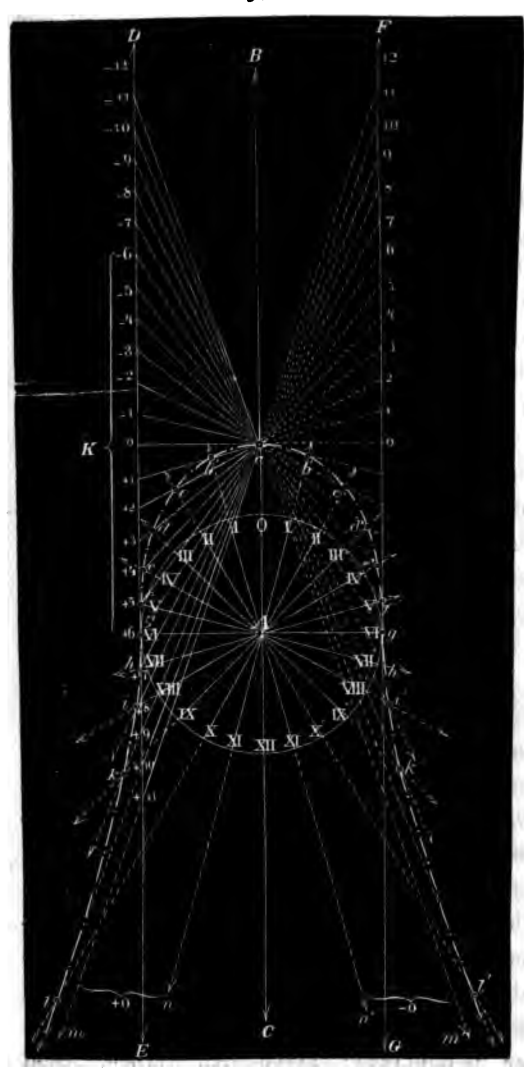
Die hier nachfolgende Methode gehört unstreitig zu den interessantesten Auflösungen und zwar schon desshalb, weil die krumme Linie, welche diese Construction gibt, nicht nur neu, sondern auch an und für sich sehr interessant ist.

Wie bereits bei der Dinostrat'schen Quadratrix gesagt wurde, war diese Quadratrix die Veranlassung, auch andere solche zu entdecken. Alle diese stimmen jedoch in der Construction darin überein, dass man den Halbmesser und die Peripherie eintheilt und hierauf parallele Kreisbögen nach einem bestimmten Gesetze so führt, dass die Halbmesser des Grundkreises geschnitten werden. Geht man doch von dieser Idee ab, nimmt statt dem Halbmesser eine andere und statt den Parallelen von irgend einem Punkte ausgehende Gerade als Strahlenbüschel an, so kommt man auf verschiedene andere Systeme von Linien, wovon ein Beispiel hier gegeben wird.

Unsere krumme Linie wird also auf folgende Art gefunden:

Man beschreibe aus *A* mit *AO* (Fig. 173) einen Kreis und theile ihn in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, hier in 24, errichte in *A* auf den Durchmesser gg' eine Lothrechte *BC*, ziehe in *g* an den aus *A* beschriebenen Grundkreis eine Tangente *DE* und trage auf dieser von *g* aus eine beliebige Einheit mehrmals auf (hier ist diese Einheit gleich der Sehne des 24. Theiles des Grundkreises angenommen). Betrachtet man nun die durch *A* auf gg' gezogene Normale *BC* als Axe, und nimmt in derselben wo immer den Anfangspunkt für die krumme Linie, z. B. in *a* an, so werden die übrigen Punkte auf folgende Art bestimmt:

Fig. 173.



Man zähle von dem Berührungspunkte *g* der an den Kreis in *g* gezogenen Tangente angefangen so viele Theile ab, als wie viele der Viertelkreis oder Quadrant des Grundkreises bei der Theilung erhalten hat, also hier 6 solche Theile, nehme den so gefundenen Punkt als Anfangspunkt der Bezifferung für die Theilpunkte der Tangente an und beziffere die unterhalb auf der Tangente befindlichen Theilungspunkte mit $+1$, $+2$, $+3$, $+4$, $+5$, $+6$ . . . ., so wie die

oben stehenden Punkte mit — 1, — 2, — 3, — 4, — 5, — 6...., wie dies die Figur zeigt. Verbindet man nun den Anfangspunkt *a* mit + 1 der Tangente *DE* und verlängert den Halbmesser *AI* bis die Verbindungslinie + 1 *a* geschnitten ist, so erfolgt *b* als ein zweiter Punkt dieser krummen Linie; wird ferner *a* mit + 2 der Tangente verbunden, sodann der Halbmesser *AII* bis zu dieser Verbindungslinie verlängert, so erhält man *c* als einen dritten Punkt dieser krummen Linie; ebenso gibt *a* mit + 3 verbunden und *AIII* bis + 3 *a* verlängert, den vierten Punkt u. s. w. Betrachtet man nun diese Construction genau und verfolgt sie bis zum Punkte *g*, so wird man leicht einsehen, dass diese Curve durch den Punkt *g*, welcher im Endpunkte des Halbmessers *Ag* ist, durchgehen muss. Und macht man diese Construction auch noch weiter, so findet man auch noch weitere Punkte dieser Krummen, hier *h*, *i*, *k*, *l* . . .

Eben so sieht man leicht ein, dass man bei fortgesetzter Operation auf eine Asymptote stossen muss, welche dann erfolgt, wenn der aus *a* geführte Strahl einen eben so grossen Winkel mit der Axe *BC* bildet, wie der aus *A* gezogene und verlängerte Halbmesser mit derselben Axe gibt.

Am interessantesten ist dabei die Bildung (Construction) der zweiten Hälfte oder des zweiten Astes: denn hiezu braucht man nicht etwa einer zweiten Tangente, sondern es werden die Punkte für den zweiten Ast mittels der negativ angenommenen Punkte derselben Tangente gefunden. Verbindet man also *a* mit — 1, — 2, — 3, — 4 . . . . der in *g* an den Grundkreis gezogenen Tangenten *DE* und verlängert jede solche Verbindungslinie über *a* hinab bis die Verlängerungen der entsprechenden Halbmesser *AI'*, *AII'*, *AIII'* geschnitten werden, so erhält man die Punkte für die zweite Hälfte. So gibt — 1 *a* und *AI'* gehörig verlängert den Punkt *b'*; ferner — 2 *a* mit *AII'* gehörig verlängert, den Punkt *c'*; eben so — 3 *a* mit *AIII'* gehörig verlängert den Punkt *d'* u. s. w. Alle diese Punkte sind in derselben Stellung gegen die Axe *BC* rechts, wie die zuvor bestimmten Punkte links, wodurch also eine symmetrische Curve mittels einer einzigen Tangente erhalten wird.

Auch für die zweite Hälfte erhält man eine Asymptote unter demselben Winkel gegen die Axe *BC*.

Die Asymptote für den positiven Theil wird offenbar zwischen den zwei Strahlen + 10 *a* und + 11 *a* sich befinden, denn + 11 *a*

gibt mit dem ihm entsprechenden Halbmesser *AXI* verlängert $+0$, oder besser gesagt, gar keinen Punkt für den positiven Ast, weil diese zwei Linien schon bedeutend divergiren.

Diese Divergenz lässt sich mittels der Trigonometrie sehr leicht ausmitteln, indem man den Winkel $+11\,aA$ berechnet und dann auch den Winkel $+11\,aB$ als den Ergänzungswinkel des Winkels $+11\,aA$ zu 180^0 sucht, und mit den Winkeln *CAn* und *nAa* vergleicht.

Auch dies ist merkwürdig, dass die Asymptoten nicht so wie bei der Kegelschnittslinie Hyperbel von Aussen, sondern von Innen erfolgen; man hat hier also innere Asymptoten dieser krummen Polysectionslinie.

Will man nun mittels dieser krummen Linie irgend einen Winkel, hier z. B. den Winkel *OAIII* und dessen Bogen *OIII* in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, z. B. in drei, theilen, so führe man aus dem Anfangspunkte *a* die $ao \perp Aa$, mache $ao = AO$ und verlängere den Schenkel *AIII* bis zu dieser krummen Linie, d. i. bis *d*; führe aus *a* durch *d* eine Gerade, bis die aus *o* an den Grundkreis *A* gezogene Tangente geschnitten wird, und theile das so abgeschnittene Stück $0+3$ der Tangente *DE* in so viele gleiche Theile, als wie viele bei dem Bogen verlangt werden; verbindet man zuletzt die Punkte $+1$, $+2$ der Tangente mit *a* und führt aus den so erfolgten Punkten *b* und *c* der Curve nach dem Mittelpunkte die Strahlen *bA*, *cA*, so erhält man die Theilung des Bogens und des Winkels, so dass:

$$\text{arc } OI = III = IIIII = \tfrac{1}{3}\, OIII$$

und $\sphericalangle\, OAI = IAII = IIAIII = \tfrac{1}{3}\, AIIIO$

mathematisch richtig erhalten wird.

Wie man aus der Construction sieht, lassen sich die beiden anfänglichen Stücke, d. i. sowohl das des positiven als auch das des negativen Astes zur Theilung des ganzen Halbkreises benützen, wobei man die erforderlichen Hilfspunkte sehr scharf und deutlich, somit auch die Theilung des Halbkreises genau erhält.

Zu dieser Theilung ist das mit der grossen Klammer in der Figur angedeutete Stück *K* der Tangente, d. i. von 0 bis $+6$ und -6 erforderlich. Das Stück *K* ist $= 2\,Aa$, welches sich aus der Construction ergibt.

Will man nun den Halbkreis in eine beliebige Anzahl gleicher Theile theilen, so kann diese Anzahl paar oder inpaar, also

$2n$ oder $2n + 1$ sein. Im ersten Falle wird man das Tangentenstück K in eine so grosse Anzahl gleicher Theile theilen, als wie viel Theile im Halbkreise verlangt werden, und im zweiten Falle muss das Tangentenstück K in doppelt so grosse Anzahl gleicher Theile getheilt und jeder zweite Theilungspunkt als Hilfspunkt benützt werden, weil in diesem Falle der Punkt 0 im Halbkreise kein Theilungspunkt, sodern nur ein Halbirungspunkt des verlangten Theiles sein wird.

Diese Construction ist desshalb besonders merkwürdig und interessant, weil man bei der verschiedenen Annahme des Punktes a und auch der Geraden DE auch verschieden geformte Curven erhält. Wir haben jedoch von den unzähligen Curven, welche hier möglich sind, nur drei mittels der Tangente hervorgehoben, d. i. die bereits gegebene und die zwei hier nachfolgenden.

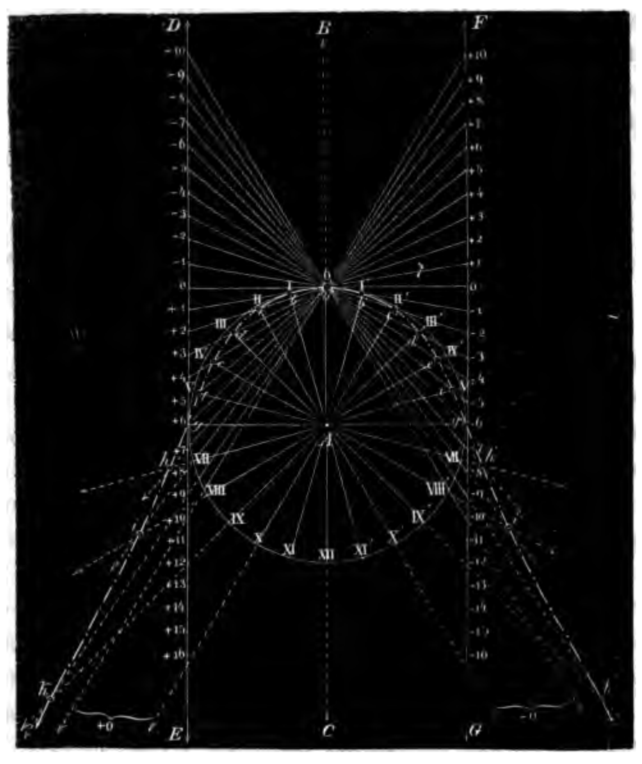
Indem man nun den Anfangspunkt a weiter und weiter von dem Grundkreise A hinausrückt, erhält auch der Kopf dieser Curve eine über die Tangenten mehr und mehr hinausgebogene Form, und es werden sich auch die zwei Aeste dieser Curve immer mehr und mehr einander nähern. Rückt man hingegen mit dem Punkte a immer weiter und weiter gegen den Mittelpunkt des Grundkreises, so rücken auch die zwei Aeste dieser Curve weiter und weiter auseinander und die ganze Curve erhält eine der Hyperbel ähnliche Form; welche desto mehr gestreckt erscheint, je näher man mit dem Punkte a an den Mittelpunkt des Grundkreises kommt.

In jedem dieser Fälle wird die krumme Linie einaxig symmetrisch erfolgen, sobald der Punkt a in dem vertikalen Durchmesser oder in dessen Verlängerung angenommen wird. Nimmt man dagegen diesen Punkt seitwärts der Vertikalen BAC, so erhält man wieder andere Formen dieser Curve. Ja man erhält sogar am Kopfe derselben Schlingenformen, von denen wir jedoch nur solche hier angeben, welche für die Theilung des Winkels sehr günstig zu sein scheinen und dabei, so wie die vorhergehende, die Symmetrie nicht verlieren.

Nehmen wir nun an, den Anfangspunkt der Curve in dem Endpunkte des vertikalen Durchmessers, also zugleich in der Peripherie des Grundkreises an, so wird unsere krumme Linie symmetrisch erhalten, indem man bei der Construction auf die nachfolgende Art verfährt:

Man beschreibe aus *A* (Fig. 174) mit einem beliebigen Halb-

Fig. 174.



messer, hier mit *A O* einen Kreis und theile ihn in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, hier in 24; ziehe in dem Endpunkte *g* des horizontalen Halbmessers *A g* eine Tangente, fälle auf diese aus dem angenommenen Anfangspunkte *a* eine Lothrechte *a o*, theile das so auf der Tangente erhaltene Stück *g o* in so viele gleiche Theile, als wie viele nach der Theilung der Quadrant erhalten hat, trage einen solchen Theil auf der Tangente beiderseits noch mehrmals auf und mache die Bezifferung von dem Nullpunkte angefangen so, dass die unteren Theilpunkte das positive und die oberen das negative Zeichen erhalten. — Hat man nun diese Vorbereitung getroffen, so werden die Punkte der Curve auf folgende Art bestimmt: Man verbinde + 1 mit *a*, so schneidet diese Verbindungslinie den Halbmesser *A* 1 in *b* und gibt *b* als den zweiten Punkt der Curve; verbindet man + 2 mit *a*, 'so schneidet diese Verbin-

dungslinie den Halbmesser *AII* in *c*, und gibt *c* als den dritten Punkt dieser Curve; ferner + 3 mit *a* verbunden, gibt auf dem Halbmesser *AIII* den Punkt *d* als den vierten Punkt dieser Curve u. s. w.

Der Punkt *g* wird erhalten, indem man den Punkt + 6 mit *a* verbindet; nun ist aber der Punkt + 6 zugleich ein Endpunkt des Halbmessers *Ag*, es wird daher der Endpunkt *g* des Halbmessers *Ag* zugleich ein Punkt der Curve sein, also derjenige Punkt, wo die Peripherie des Grundkreises geschnitten wird.

Geht man nun mit der Bestimmung der Punkte so weiter fort, so findet man, dass die aus *a* durch den Punkt + 10 der *DE* geführte Gerade fast eine Asymptote der Curve sein wird; denn die aus *a* durch + 10 geführte Gerade läuft mit der Verlängerung des Halbmessers *AX* parallel, wenn $\measuredangle + 10\, aA = \measuredangle\, XAXII$ ist, welches sich durch Rechnung sehr leicht finden lässt.

So wie man diesen Ast bestimmt hat, eben so findet man auch den zweiten, indem man die negativen, d. i. die oberen Punkte der Tangente *DE* benützt. Zieht man also die Linien — 1 *a*, — 2 *a*, — 3 *a* . . ., und verlängert jede über den Punkt *a* hinab, bis die entsprechenden Halbmesser *AI'*, *AII'*, *AIII'* . . . geschnitten werden, so hat man: *b'*, *c'*, *d'*, *e'* . . . als Punkte für den zweiten Ast. Der Punkt *g'* wird erhalten, indem man aus — 6 durch *a* eine Gerade zieht; und da auch diese Gerade unter 45° gegen *DE* geht, so muss sie durch den Endpunkt des horizontalen Durchmessers gehen; somit muss *g'* als ein Punkt der Curve zugleich in der Peripherie des Grundkreises sein.

Geht man nun so fort mit der Bestimmung der Punkte, so findet man, dass die aus — 10 durch *a* geführte Gerade fast eine Asymptote der Curve sein wird; denn sie geht mit der Verlängerung des Halbmessers *AX'* beinahe parallel.

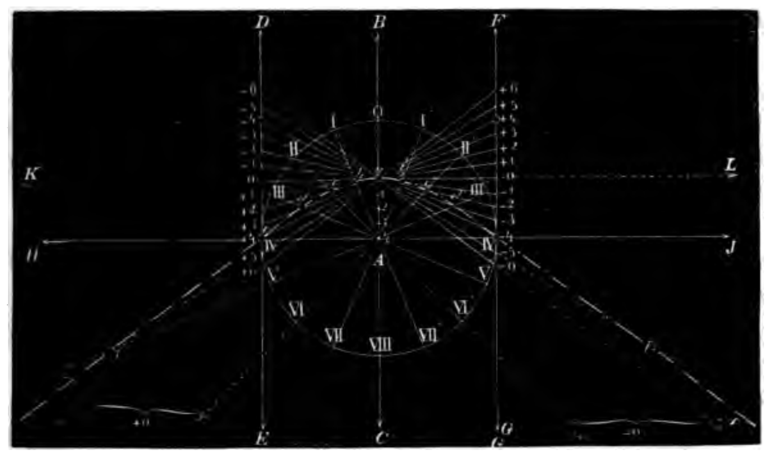
Untersucht man dies durch Rechnung, so findet man, dass die diesfällige Differenz nur sehr gering ist.

Man sieht also im Allgemeinen, dass hier so wie im ersten Falle, alle noch durch Construction möglichen Punkte nur vermittels einer einzigen Tangente erhalten werden, und dass die den Theilpunkten der Tangente entsprechenden Punkte der Curve ganz dieselbe aber entgegengesetzte Lage bezüglich der Axe *BC* haben.

Nimmt man ferner den Fall an, dass die krumme Linie ihren Anfang innerhalb des Grundkreises hat, hier Fig. 175 in *a*, etwa im

Halbirungspunkte des verticalen Halbmessers *AO*, so wird man in

Fig. 175.



diesem Falle, so wie zuvor, eine symmetrische Curve erhalten. Hat man also den Grundkreis eingetheilt, hier z. B. in 16 gleiche Theile, so muss auch das Stück *oe* der Tangente *DE* in eben so viele gleiche Theile getheilt werden, als wie viele bei dieser Theilung für den Quadranten entfallen. Hier muss also *eo* in 4 gleiche Theile getheilt, und ein solcher Theil auf derselben Tangente noch mehrmals aufgetragen werden, sobald man für diese Curve auch die ausserhalb des Grundkreises liegenden Punkte bestimmen will.

Wie die Figur zeigt, erhält die Curve in diesem Falle eine der Hyperbel ähnliche Form und geht fast in eine Gerade über.

Eine nähere Betrachtung dieser Curve zeigt, dass man mit ihr nicht so genau die Polysection vornehmen kann, wie mit jenen zwei zuvor angegebenen, weil die aus *a* nach den Theilpunkten der Tangente gezogenen Strahlen diese Curve sehr schief schneiden. Dies findet desto mehr Statt, je gestreckter diese Curve wird, d. h. je näher man mit dem Anfangspunkte *a* gegen den Mittelpunkt rückt.

Unter allen diesen unzähligen krummen Linien sind auch solche möglich, welche mit der Peripherie des Grundkreises zum Theile zusammenfallen, welches dann insbesondere stattfindet, wenn man den Anfangspunkt dieser krummen Linie in der Peripherie des Grundkreises und statt der Tangente eine Secante als Hilfslinie annimmt. Die Construction einer solchen Linie ist schon desshalb interessant, weil man dann schon mittels des Theiles der Peripherie

des Grundkreises, mit welchem diese Curve zusammenfällt, jeden diesem Peripherietheile entsprechenden Winkel sehr leicht in eine beliebige Anzahl gleicher Theile theilen kann, was in den drei obangeführten Fällen erst dann stattfinden kann, wenn man die krumme Linie selbst zuerst construirt hat.

Die daraus abgeleitete Methode der Polysection ist unter Nr. X gegeben.

Die diesem Falle entsprechende Curve geht durch die Punkte *B* und *D*, fällt an dem Punkte *B* zum Theile mit dem Kreise zusammen und geht dann nach zwei Richtungen in's Unendliche fort. Auch durch diese Auflösung sind Tausende von Linien bestimmt, welche nicht nur die drei angegebenen, sondern auch verschiedene andere Formen erhalten.

Anhang.

Construction bestimmter Winkel.

Es kommt in der Praxis sehr oft vor, einen Winkel von bestimmtem Gradmasse zu zeichnen, ohne den Transporteur oder die Sehnentafel bei sich zu haben. Eben so umgekehrt, kann der Fall eintreten, den gegebenen oder schon gezeichneten Winkel in Gradmasse zu hestimmen.

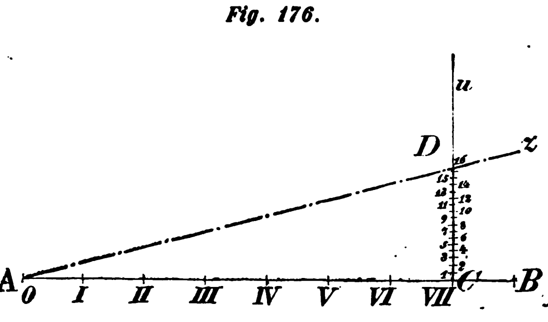
Für derlei Fälle ist es also wünschenswerth, eine allgemeine Methode zu haben, nach welcher man jeden verlangten Winkel construiren oder auch jeden gezeichneten Winkel in Gradmasse bestimmen kann.

Da ein solches Verfahren durch rein geometrische Construction mathematisch richtig nicht möglich ist, so waren wir bemüht, wenigstens näherungsweise diese Aufgabe zu lösen, jedoch so, als es nur die praktische Genauigkeit verlangt.

Wir wollen uns also zuerst mit der Skala oder der allgemeinen Construction eines beliebigen Winkels bis 16° bekannt machen.

Man nehme auf einer Geraden *AB* (Fig. 176) eine beliebige Einheit *A*1 an und trage sie auf *AB* von *A* aus 7mal auf, errichte in dem so erhaltenen 7. Theilungspunkte oder in *C* eine Normale, trage auf derselben von

Fig. 176.



C aus die zwei auf *AB* angenommenen Einheiten, d. i. $\frac{2}{7}$ von *AC* auf, und theile dann die so begränzte Normale in 16 gleiche Theile, so erhält man, wenn *A* als Scheitelpunkt angenommen und mit jedem auf der Normalen erhaltenen Theilungspunkte durch eine Gerade verbunden wird, die Winkel in der natürlichen Ordnung von 1°—16°, so dass:

$\measuredangle CA1 = 1^0$	$\measuredangle CA5 = 5^0$	$\measuredangle CA9 = 9^0$	$\measuredangle CA13 = 13^0$
$\measuredangle CA2 = 2^0$	$\measuredangle CA6 = 6^0$	$\measuredangle CA10 = 10^0$	$\measuredangle CA14 = 14^0$
$\measuredangle CA3 = 3^0$	$\measuredangle CA7 = 7^0$	$\measuredangle CA11 = 11^0$	$\measuredangle CA15 = 15^0$
$\measuredangle CA4 = 4^0$	$\measuredangle CA8 = 8^0$	$\measuredangle CA12 = 12^0$	$\measuredangle CA16 = 16^0$

In wie ferne nun dabei gefehlt wird und bei welchen Winkeln die grössten oder die kleinsten Fehler begangen werden, kann man sich auf folgende Art überzeugen.

Es ist AC die eine Kathete und $C1$ oder $C2$ oder $C3$ u. s. w. die andere Kathete eines rechtwinkeligen Dreieckes; man hat demnach, wenn die einzelnen Winkel der Ordnung nach mit x, x_1, x_2, x_3 u. s. w. bezeichnet werden:

Für den Winkel $CA1$, $C1 = AC \operatorname{tang} x$; also $\operatorname{tang} x = \frac{C1}{AC}$,

" " $CA2$, $C2 = AC \operatorname{tang} x_1$ " $\operatorname{tang} x_1 = \frac{C2}{AC}$,

" " $CA3$, $C3 = AC \operatorname{tang} x_2$ " $\operatorname{tang} x_2 = \frac{C3}{AC}$,

" " $CA4$, $C4 = AC \operatorname{tang} x_3$ " $\operatorname{tang} x_3 = \frac{C4}{AC}$,

. . . .

Da nun CD als die eine Kathete in 16 gleiche Theile getheilt wurde, so hat die andere Kathete AC 56 solche Theile, indem nach der Construction $\frac{1}{2} CD = \frac{1}{7}$ von AC, also $AC = 7 \times 8 = 56$ ist. Für den Winkel $CA16$ oder CAD hat man

$$\operatorname{tang} x_{16} = \frac{C16}{AC} = \frac{16}{56},$$

und $\log \operatorname{tang} x_{16} = \log 16 - \log 56$;
nun ist $\log 16 = 2{\cdot}2041200 - 1$,
und $\log 56 = 1{\cdot}7481880$
daher $\log 16 - \log 56 = 0{\cdot}4559320 - 1$,
somit $\log \operatorname{tang} x_{16} = 9{\cdot}4559320 - 10$.
Diesem entspricht: $15^0\ 56'\ 43''$.

Es ist somit der nach dieser Construction gefundene Winkel

$$CAD = CA16 = 15^0\,56'\,43'';$$

da nun der wahre Winkel 16^0 sein soll; so folgt, wenn man den gefundenen Werth von dem wahren abzieht, der hierbei begangene Fehler $F = 15^0\ 59'\ 60'' - 15^0\ 56'\ 43'' = 0^0\ 3'\ 17''$.

Es ist somit der Fehler unbedeutend, so dass man ihn in der Praxis vernachlässigen kann.

Wird nun auf diese Art mit der Rechnung auch weiter vorgegangen, so erhält man folgende Fehler-Tabelle:

Für $x = 1^\circ$	ist der gef.	Winkel	$= 1^\circ\ 1'\ 22''$,	dah. d.	Fehler $0^\circ 1' 22''$	zu gross,
„ $x = 2^\circ$	„	„	$= 2^\circ\ 2'\ 40''$	„	„ $0^\circ 2' 40''$	„
„ $x = 3^\circ$	„	„	$= 3^\circ\ 3'\ 59''$	„	„ $0^\circ 3' 59''$	„
„ $x = 4^\circ$	„	„	$= 4^\circ\ 5'\ 8''$	„	„ $0^\circ 5' 8''$	„
„ $x = 5^\circ$	„	„	$= 5^\circ\ 5'\ 7''$	„	„ $0^\circ 5' 7''$	„
„ $x = 6^\circ$	„	„	$= 6^\circ\ 6'\ 55''$	„	„ $0^\circ 6' 55''$	„
„ $x = 7^\circ$	„	„	$= 7^\circ\ 7'\ 35''$	„	„ $0^\circ 7' 35''$	„
„ $x = 8^\circ$	„	„	$= 8^\circ\ 7'\ 48''$	„	„ $0^\circ 7' 48''$	„
„ $x = 9^\circ$	„	„	$= 9^\circ\ 7'\ 48''$	„	„ $0^\circ 7' 48''$	„
„ $x = 10^\circ$	„	„	$= 10^\circ\ 7'\ 28''$	„	„ $0\ 7' 28''$	„
„ $x = 11^\circ$	„	„	$= 11^\circ\ 6'\ 46''$	„	„ $0^\circ 6' 46''$	„
„ $x = 12^\circ$	„	„	$= 12^\circ\ 5'\ 41''$	„	„ $0^\circ 5' 41''$	„
„ $x = 13^\circ$	„	„	$= 13^\circ\ 4'\ 9''$	„	„ $0^\circ 4' 9''$	„
„ $x = 14^\circ$	„	„	$= 14^\circ\ 2'\ 10''$	„	„ $0^\circ 2' 10''$	„
„ $x = 15^\circ$	„	„	$= 14^\circ 59'\ 42''$	„	„ $0^\circ 0' 8''$	zu klein,
„ $x = 16^\circ$	„	„	$= 15^\circ 56'\ 43''$	„	„ $0^\circ 3' 17''$	„

Man hat daher durchschnittlich, wenn die Sekunden unter 30 vernachlässigt und die zu weit über 30 reichende als Minute angenommen werden, das Maximum 8 Minuten.

Wie man aus dieser Tabelle sieht, wächst der Fehler bis zur Hälfte der Senkrechten *CD* und dann nimmt er ab, so dass bei 15° der Fehler fast 0 angesehen werden kann.

Da nun bei den ersten und letzteren dieser Winkel der Fehler nicht so gross, und die Construction sehr einfach ist, so kann diese Methode als eine praktische genannt werden.

Wie wir bereits gesehen haben, kann die Construction mittels eines Zirkels sehr schnell ausgeführt werden, allein man kann sie eben so gut beim freien Handzeichnen mit einem besonderen Vortheile anwenden, nur muss man dabei umgekehrt verfahren.

Man wird nämlich, statt eine beliebige Einheit auf einer Geraden aufzutragen, ein beliebiges Stück annehmen, dieses in 8 gleiche Theile theilen, im siebenten Theilungspunkte eine Senkrechte errichten und im Uebrigen wie zuvor verfahren. Da nun die Eintheilung in 8 und 16 gleiche Theile nach dem Augenmasse, also ohne Zirkel, darum sehr leicht und schnell bewerkstelliget werden kann, indem man nur Halbirungen vorzunehmen hat, so folgt daraus, wie sich auch jeder überzeugen kann, dass diese Methode in jeder Beziehung empfehlbar ist.

Wollte man nach dieser Methode irgend einen Winkel von

mehr als 16° zeichnen, so müsste dann der gegebene Winkel so zerlegt werden, dass jedesmal der Winkel von 15° dabei vorkommt, indem nach der Berechnung bei der Construction dieses Winkels der geringste Fehler begangen wird. Die übrige Ergänzung oder der nöthige Abzug um den fraglichen Winkel zu erhalten, wird, wie zuvor, nach der 16 gradigen Skala gesucht.

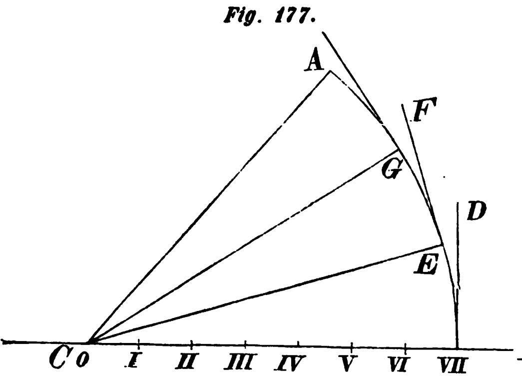
Soll z. B. der Winkel von 48° construirt werden, so ist

$$48 = 3 \times 15 + 3;$$

man wird daher zuerst den Winkel von 15° suchen, diesen dann dreimal nehmen und diese Summe um 3° vermehren. Hat man nun wirklich einen solchen Winkel construirt, so ist der Fehler dabei 0° 3′ 5″; wird hingegen 48 in 3 mal 16 zerlegt und so die Construction vorgenommen, so begeht man einen Fehler von 0° 9′ 51″, welcher Fehler bedeutend grösser ist als nach der vorhergehenden Zerlegung und Construction.

Ist also (Fig. 177) z. B. der Winkel *ECVII* = 16° gefunden worden, so braucht man nur aus *C* mit dem Halbmesser *CVII* einen Bogen zu beschreiben und auf diesem dann den Bogen *EVII* dreimal aufzutragen, wodurch also ∡ *ACVII* = 48°

Fig. 177.



gefunden wird, mit dem Fehler von 9′ 51″. Diesen Fehler kann man dadurch verbessern, indem man nur um die Dicke des Striches zurückgeht, welches für einen Durchmesser von 5″ bis 6″ noch gilt.

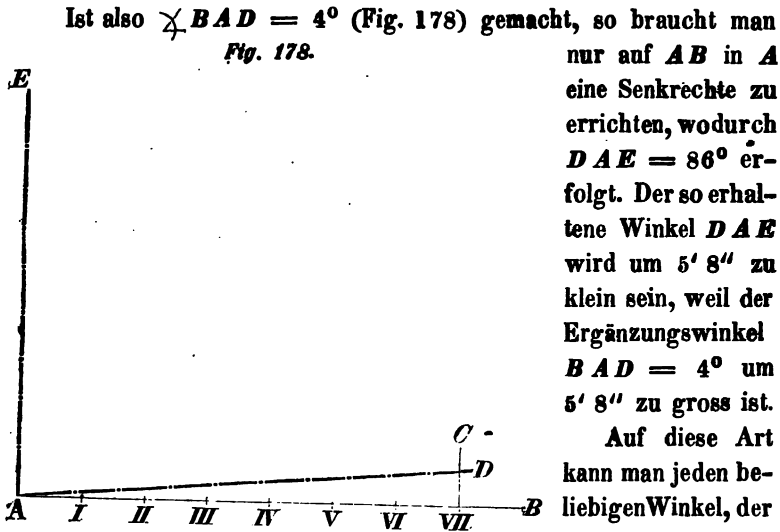
Viel genauer erhält man den Winkel von 48°, wenn man zuerst den von 45° und dann den von 3° zeichnet. Dasselbe gilt von jedem Winkel, der nahe an oder über 30°, 45°, 60°, 90° u. s. w. ist.

Da nun das Auftragen des Winkels oder das Vervielfachen desselben bei grossen Winkeln sehr lässig ist, so construirt man lieber zuerst einen kleinen Winkel als Ergänzung zu 90 oder zu 180° und zieht dann diesen von dem von 90 oder von 180° ab, wodurch man den Rest als den verlangten Winkel erhält.

Soll z. B. der Winkel von 86° gezeichnet werden, so zeichne man auf die angegebene Weise einen Winkel von 4° und ziehe diesen von 90 ab.

Ist also $\measuredangle BAD = 4^0$ (Fig. 178) gemacht, so braucht man nur auf AB in A eine Senkrechte zu errichten, wodurch $DAE = 86^0$ erfolgt. Der so erhaltene Winkel DAE wird um 5′ 8″ zu klein sein, weil der Ergänzungswinkel $BAD = 4^0$ um 5′ 8″ zu gross ist.

Fig. 178.



Auf diese Art kann man jeden beliebigen Winkel, der nahe an 90° ist, oder dessen Ergänzung zu einem andern bekannten und leicht construirbaren Winkel gefunden werden kann, sehr leicht finden.

Soll also ein Winkel von 59° gesucht werden, so construire man den Winkel von 1° innerhalb an dem einen Schenkel des Winkels von 60°; ist der Winkel von 58° zu suchen, so construire man den Winkel von 2° innerhalb an dem einen Schenkel des Winkels von 60° u. s. w.

Für jeden Winkel über 60° suche man den Ueberschusswinkel und zeichne hiezu einen Winkel von 60° u. s. w.

Auf diese Art könnte man mit Leichtigkeit die Peripherie auch ohne Zirkel in 360 gleiche Theile theilen, welches jedoch eine grosse Uebung erfordert.

Wie man aus dem Obigen sieht, ist das angegebene Verfahren höchst einfach, sehr leicht zu merken und daher sehr praktisch und empfehlbar, besonders da, wo es sich um die schnelle Angabe und Bestimmung eines Winkels handelt und keine so grosse Genauigkeit verlangt.

Praktisch und leicht zu merken ist sie darum, weil man die Construction durch lauter Halbirungen vornehmen kann und das *Verfahren allgemein* ist.

